

C. — LE PROJEZIONI QUANTITATIVE ED EQUIVALENTI
DELLA CARTOGRAFIA.

del Socio M. FIORINI, professore all'Università di Bologna.

(continuazione e fine)

§ 10. A fissare la costante ρ' e la $\varphi(u)$ nella proiezione equivalente studiata al § 8 sia dato il raggio ρ_e con cui è descritto l'equatore e richieggasi che il meridiano iniziale stendasi in linea retta.

Le coordinate polari del punto generale della rappresentazione, introducendo la latitudine l in luogo della colatitudine u sono

$$\rho = \rho_e - \int_0^l r_1 dl, \quad v = \frac{r_2 t}{\rho}$$

e per l'alterazione δ si ha

$$\tan \delta = t \left(\sin l - \frac{r_2}{\rho} \right).$$

Nel caso della sfera, posto

$$\rho_e = ah$$

e preso per unità il grado equatoriale, è

$$\rho = h - l, \quad v = \frac{t \cos l}{h - l},$$

$$\tan \delta = \frac{\pi t \sin l}{180} - \frac{t \cos l}{h - l}.$$

E però, segnato con una linea retta il meridiano iniziale, se ne faccia la divisione, a partire dal punto dove intendesi passare l'equatore, in gradi latitudinali uguali agli obbiettivi da protrarsi in numero di h per avere il comun centro dei paralleli, si descrivano questi con archi circolari, si dividano nei loro gradi longitudinali uguali agli obbiettivi e se ne congiungano gli omonimi punti di divisione con linee a fine di avere i meridiani. Così viene a tracciarsi la rete della mappa.

La proiezione della sfera in tale sistema ed in surrogazione di quella a meridiani curvilinei proposta da TOLOMEO (1) per la carta dell'abitabile fu adottata dal MERCATORE. Il quale, ispirandosi alle modificazioni introdotte dal SILVANO (2) ed alle nuove proiezioni esposte dal WERNER recò un vero perfezionamento al metodo Tolomaico. Se non che rese più completa la regola del SILVANO serbando, non sopra alcuni, ma sopra tutti i paralleli, i gradi longitudinali obbiettivi e abbandonò l'idea Werneriana di collocare il comun centro dei paralleli nel polo. Ed è appunto nelle note alla tavola intitolata: *Universalis Tabula juxta Ptolemaeum*, dove il MERCATORE delineò la carta del mondo antico colle regole Tolomaiche perfezionate, che leggesi: *In hac tabula parallelorum non unius alteriusve, (ut sufficere dicit Ptolemaeus) sed omnium plane symmetriam ad circulum maximum servavi, quo sphaericae dispositionis formam quadranguli quam proxime repraesentarent et debita longitudinis ad latitudinem proportio in regionibus servaretur. Oculi tamen in medio totius continentis centrumque sphaerae directi rationem, quam, lib. I, cap. 24, jubet Ptolemaeus, observavi quod ea docte, eleganter, accomodatissimeque ad opticae exigentiam excogitavit* (3). Con che l'autore significa come i gradi di longitudine serbino sulla carta il rapporto che hanno sulla sfera. E siccome l'ispezione della tavola mostra che il grado dell'equatore uguaglia quello del meridiano centrale, così risultano conservati i gradi di longitudine sopra tutti i paralleli. Non è detto in quale modo sia determinato, sul meridiano medio, il comune centro dei paralleli, ma, volendo il MERCATORE, secondo le parole ora riferite, attenersi alla mente di TOLOMEO, è probabile, e ciò con gran fondamento di verità, che ne abbia seguiti i volgarizzatori e commentatori e particolarmente il PIRCKEIMER ed il MOLETI i quali assumono il raggio dell'equatore uguale a $165^{\circ} 50'$, poichè menziona, fra le cinque versioni latine consultate, quelle del primo colle ricognizioni del VILLANOVANO (4) e l'altra del MOLETI (5) a cui attribuisce grande valore (6). La quale probabilità è accresciuta da ciò che cercando (§ 8) quale sia il parallelo incontrato dai meridiani ad angolo retto nel caso del raggio dell'equatore pari a $165^{\circ} 50'$ si trova essere quello posto alla latitudine di $21^{\circ} 40'$. Il

(1) *Geographia*, lib. I, Cap. XXIV. Vedi il § precedente e *Le Profezioni*, ecc., Cap. VIII, § 14.

(2) Vedi il § precedente e *Le Profezioni*, ecc., Cap. VIII, § 15.

(3) *Tabula geographica Cl. Ptolemaei ad mentem auctoris restituta et emendata per Gerardum Mercatorem. Duisburgi, 1578.*

(4) Il MERCATORE consultò l'edizione: *Claudii Ptolomaei Alexandrini geographiae enarrationis libri octo, ex Bilibaldi Pirckeymeri translatione*, etc. Lugduni, 1535.

(5) *Geographia Cl. Ptolomaei Alexandrini olim a Bilibaldo Pirckheimerio translata, et nunc multis codicibus graecis collata, pluribusque in locis ad pristinam veritatem redacta a Josepho Moletio mathematico. Venetiis, 1562.*

(6) *Postrema*, dice il MERCATORE nell'accennare alle traduzioni consultate, *est Josephi Moleti, qui versionem Bilibaldi rursus cum multis codicibus contulit*. Così nella prefazione.

che pare confermato dalla Tavola Mercatoriana, dove, i paralleli essendo delineati di 10° in 10° , i meridiani fanno col parallelo di 20° un angolo che l'occhio giudica essere ben prossimo al retto.

Di somma importanza è il perfezionamento che il MERCATORE dietro le tracce del SILVANO e fors'anche dell'APIANO (1), e seguendo le idee dello STAB e del WERNER, recò alla proiezione di TOLOMEO. Le procurò il vantaggio della conservazione dei gradi longitudinali sui singoli paralleli e la collocò fra le proiezioni che hanno la proprietà di mantenere immutate le aree (2).

§ 11. Vogliasi, come altra applicazione della proiezione equivalente trattata al § 8, che, essendo il meridiano iniziale steso in linea retta, le alterazioni lineari ed angolari sieno nulle alla data colatitudine u' . Dicendo r'_2 e ρ' i raggi del parallelo u' sullo sferoide e nella rappresentazione, dev'essere, come si disse al citato paragrafo,

$$\rho' \cos u' - r'_2 = 0$$

e quindi

$$\rho' = \frac{a \tan u'}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u'}}$$

Tale è il valore della costante ρ' , la quale uguaglia la tangente al meridiano condotta pel punto di colatitudine u' e terminata all'asse polare ed altro non è che il lato del cono tangente allo sferoide secondo il parallelo u' .

Le due equazioni della proiezione sono

$$\rho = \sigma - \sigma' + \rho', \quad v = \frac{r_2 t}{\rho}.$$

Alla costruzione della carta vale il metodo indicato in fine del menzionato paragrafo. Del rimanente, descritto il parallelo u' col raggio ρ' , a trovare i raggi degli altri paralleli basta aggiungerli $\sigma - \sigma'$ che è l'arco di meridiano compreso fra le colatitudini u e u' (3).

Per ciò che riguarda le alterazioni lineari ed angolari servono le formule del detto paragrafo essendo

$$\tan \delta = t \left(\cos u - \frac{r_2}{\rho} \right),$$

(1) Vedi *Le Proiezioni*, ecc., Cap. VIII, § 16.

(2) Il BREUSING (Op. cit., p. 22 e 23), fa risultare la proprietà che ha la proiezione di TOLOMEO modificata dal MERCATORE di conservare le aree. Vedi *Le Proiezioni*, ecc., p. 479 e 595.

(3) Qui torna proficua la tavola che dà le distanze dei paralleli dall'equatore, misurate sui meridiani, e che trovasi in *Le Proiezioni*, ecc., alla fine del Cap. I.

che, dicendo T e T' le tangenti condotte allo sferoide nei punti di colatitudine u e u' e terminate all'asse polare, può ridursi a

$$\tan \delta = \frac{t \cos u}{\rho} \left[(T' - \sigma') - (T - \sigma) \right].$$

Di questa proiezione abbiamo trattato estesamente nel libro più volte citato e là rimandiamo per ulteriori disquisizioni (1).

Della medesima è un caso particolare la proiezione equivalente Werneriana, bastando per dedurnela, fare $u' = 0$ e considerare la sfera in luogo dello sferoide. E tale pure può dirsi la proiezione Tolomaica modificata dal MERCATORE. Imperocchè, ritenendo in questa, come si disse, il raggio dell'equatore uguale a $165^{\circ} 50'$, si trova che le alterazioni lineari ed angolari per la sfera, vi sono nulle alla latitudine di $21^{\circ} 40'$, e che quindi la stessa n'è un caso speciale in cui la posizione del comun centro dei paralleli è fissata dal vertice del cono circoscritto alla sfera secondo la nominata latitudine.

La proiezione che forma oggetto di questo paragrafo fu praticata dal BONNE (2) (e ne porta il nome), ingegnere idrografo e cartografo francese, che l'adoperò in parecchie sue pubblicazioni e particolarmente nell'Atlante geografico della Enciclopedia Metodica (3), dove molte carte sono delineate colle regole della proiezione in discorso. Tali le tavole dell'*orbis antiquus*, delle grandi parti della Terra, Asia, Africa, Europa, America meridionale e America settentrionale, tali non poche tavole particolari. Il BONNE forse la escogitò deducendola dallo sviluppo del cono tangente allo sferoide modificato in guisa da serbare i gradi latitudinali sul meridiano centrale steso in linea retta ed i longitudinali sui paralleli; forse volle perfezionare il metodo Tolomaico; forse prese norma dalla proiezione Werneriana; forse s'ispirò ad una ben nota proiezione, di cui si dirà fra poco e che fu attribuita al FLAMSTEED; forse altro non fece che modificare il sistema col quale il MERCATORE aveva migliorate le regole di TOLOMEO. Del rimanente può essere che il BONNE abbia ideata la sua proiezione senza ispirarsi nè a TOLOMEO, nè al WERNER, nè al MERCATORE, nè al FLAMSTEED. Non si hanno forse esempi di proiezioni già note, proposte come novità da chi non conosceva tutti i lavori cartografici anteriori? Ciò che importa osservare è che nel sistema del cartografo francese vi sono

(1) Vedi *Le Projezioni*, ecc., p. 481-486, dove si discorre dell'alterazione δ che ha tanta importanza per calcolare le alterazioni lineari ed angolari, delle coordinate rettangolari del punto generale della proiezione, della loro utilità nel costruire la mappa, della carta composta di più fogli, dei problemi che questa presenta, delle alterazioni lineari ed angolari nella mappa dell'Italia.

(2) RICOBERTO BONNE, n. 1727, m. 1795.

(3) *Atlas encyclopédique par Bonne et Desmarest*. Parigi, 1787-1788.

due linee, in certo modo fondamentali, secantisi normalmente, le quali sono il meridiano centrale steso in linea retta ed un dato parallelo, posto generalmente alla latitudine media della carta, che nulle sono le alterazioni lineari ed angolari loro competenti, che i paralleli sono incontrati normalmente dalla prima linea, i meridiani dalla seconda, che il nominato parallelo è la linea di circoscrizione del cono tangente allo sferoide il cui vertice fissa la posizione del comun centro dei paralleli.

La proiezione del BONNE salì in tale credito che fu impiegata per la costruzione delle carte di non pochi Stati. In Francia fu adottata, in principio di questo secolo, per le carte da darsi in luce dal Deposito della Guerra (1). Ha servito in Italia alla composizione della carta degli antichi Stati Sardi in terraferma alla scala di 1:50,000 e delle due carte della isola di Sardegna, l'una alla scala di 1:500,000, l'altra alla scala di 1:250,000 (2).

In Austria, dove fu molto adoperata la proiezione del CASSINI (3), non fu trascurata quella del BONNE, secondo la quale furono costruite alcune carte dall'I. R. Istituto geografico militare. Tali come dice l'HERZ (4), le carte delle provincie austriache che cominciarono ad uscire nel 1845. Tale, secondo l'HARTL ed il CARUSSO la carta dell'Impero Austriaco in nove fogli alla scala di 1:864,000 col centro a 48° di latitudine e 35° di longitudine dall'Isola del Ferro pubblicata nel 1822, e di poi nel 1860 e

(1) Il D'AVEZAC, op. cit., p. 27, ha: Une commission spéciale désignée par le ministre de la guerre au mois de Janvier 1803, et composée du général Sanson, président, de l'Académicien Lacroix et des ingénieurs géographes Henry, Epailly et Plessis, fit choix de cette projection pour les cartes qui seraient désormais publiées au Dépôt de la guerre, comme répondant le mieux aux besoins des diverses services publics.

Ed il PUISSANT nella *Notice sur les tables de Projection calculées par le Capitain Plessis, Ingénieur géographe, et adoptées pour la construction de la Nouvelle Carte de France* inserita nel Tom. IV del *Mémorial du Dépôt général de la Guerre*. Parigi 1828, ha: du moment où il fu question de former une nouvelle carte topographique du royaume appropriée au besoin des differens services publics et des administrations, l'on crut devoir, à cet egard, adopter de préférence la projection de Flamsteed modifiée vers le milieu du siècle dernier par BONNE, ingénieur hydrographe de la marine, parce que cette projection jouit de deux propriétés caractéristique, savoir que les rapports des distances mesurées sur le méridien principal ou dans le sens des parallèles, et le rapports des aires quelconques sont exactement les mêmes que sur le globe terrestre. Ce choix fut d'ailleurs le résultat d'une délibération prise le 5 pluviôse an XI (25 janvier 1803) par un Commission spéciale.

(2) Intorno a tali carte vedi la mia Memoria: *Misure lineari, superficiali ed angolari offerte dalle carte geografiche* negli *Atti del Collegio degli Architetti ed Ingegneri di Firenze*, anno XI, gennajo-giugno 1886; Vedi anche *BOLLETTINO della Società Geografica Italiana*, agosto, 1886, p. 640.

(3) Il maggiore ENRICO HARTL, in *Die Projectionen der wichtigsten vom K. K. Generalquartiermeisterstab und vom K. K. Militär-geographischen Institute* estratto da *Mittheilungen des K. K. Militär-geograph Institutes*, Tom. VI, Vienna, 1886, dà una lunga nota di tutte le carte pubblicate da quell'Istituto Geografico Militare nella proiezione del CASSINI, della quale espone la teoria e studia le deformazioni. Intorno alla proiezione dei CASSINI, vedi *Le Projezioni*, ecc., Cap. V, § 22. Vedi anche l'opuscolo di C. D. CARUSSO: *Notices sur les cartes topographiques de l'État-Major-Général d'Autriche-Hongrie*. Ginevra 1887, p. 51.

(4) Op. cit., p. 186.

1867. Tale la carta dell'Europa media alla scala di 1:576,000 in 47 fogli (1).

Come pure, per non dire di altre, alle carte speciali della Svizzera nella scala di 1:100,000 in 25 fogli (2), a quella della Scozia (3), ad una carta particolare del Libano (4) fu applicata la proiezione del BONNE.

La quale salì in tanto favore presso i cartografi che ben pochi furono gli atlanti venuti di poi in luce nei quali non siasene fatto grande uso. Così nell'atlante del LAPIE (5) fu quasi dovunque applicata, e ben poche sono le carte in cui siasi usata altra proiezione. In quello del GARNIER (6) vi si ricorre pure moltissimo; ne sono esempio, per citarne alcune, le carte dell'Europa, dell'Asia, della Russia europea, della China e del Giappone. Anche nell'atlante delle STIELER (7) è molto adoperata; per essere brevi citiamo solo le carte dell'Europa, dell'Asia, dell'America settentrionale e dell'America meridionale.

Tutti gli scrittori di cartografia e non pochi di geodesia trattano della proiezione del BONNE. Il DE LA LANDE osserva che alle carte estendentesi per 30° o 40° di latitudine giova il metodo del geografo francese, il quale se ne servi per la carta dell'Impero Russo e per altre tavole, ed insegna a descrivere i paralleli per punti ricorrendo alle coordinate rettangolari (8). Vi consacra parecchie pagine il MAYER e dà le regole per costruire la rete dei meridiani e paralleli (9). Ne esposero la teoria completa e gli ammaestramenti pratici l'HENRY ed il PUISSANT, il primo in apposita Memoria (10), il secondo nei suoi Trattati di topografia e geodesia (11). Il D'AVEZAC ne offre preziosi cenni storici (12). Il TISSOT ne studia alcune

(1) HARTL, op. cit., pag. 57; CARUSSO, op. cit., p. 66 e seg.

(2) *Proceedings of the Royal Geographical Society*. Londra, 1860.

(3) Vedi H. JAMES, app. HERZ, op. cit., p. 185.

(4) *Rapport sur la carte du Liban par C. Monnoir* nel *Bull. de la Soc. de Géog. de Paris*. Serie V, Tom. IV. Parigi, 1862, p. 263.

(5) *Atlas universel de géographie ancienne et moderne par M. Lapie*. Parigi 1829.

(6) *Atlas sphéroïdal et universel de géographie par M. F. A. Garnier*. Parigi, 1862.

(7) *Handatlas von Adolf Stieler*, Gotha, Justus Perthes.

(8) *Astronomie par M. De La Lande*, 2^a ed., Parigi, 1771, Tom. III, p. 733.

(9) *Vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelskarten von Tobias Mayer*. Erlangen 1794, p. 286.

(10) *Mémoire sur la projection des cartes géographiques, adoptée au Dépôt général de la Guerre, par M. Henry*. Paris, 1810, pubblicata nel *Mémorial du Dépôt de la Guerre de la France*, Tom. II.

(11) *Supplément au seconde livre du Traité de topographie, contenant la théorie des projections des cartes par L. Puissant*. Paris, 1810, inserito di poi nella 2^a edizione del *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement par L. Puissant*. Paris, 1820, p. 103-148; *Traité de géodésie, ou exposition des méthodes trigonométriques et astronomiques par L. Puissant*, 3^a edizione Tom. II, Parigi, 1842, p. 485.

(12) Op. cit., p. 26.

proprietà, quelle che riguardano le alterazioni lineari ed angolari (1). In modo ampio ne discorrono il GERMAIN (2) ed il GRETSCHEL (3). E l'HERZ ne offre estesamente la teoria ricordandone le principali applicazioni (4). Non va dimenticato il MONET, il quale pubblicò le tavole delle coordinate rettangolari per costruire la rete dei meridiani e paralleli della carta della Spagna ad intervalli di 30', mettendo il parallelo medio a 40° di latitudine, contando le longitudini dal meridiano di Madrid, essendo i paralleli ultimi alle latitudini di 35° e 45° e distando i meridiani estremi di 10° da quello di Madrid (5). Sono pure da ricordare le tavole pubblicate nel 1881 dall'Istituto geografico militare italiano, le quali danno le coordinate rettangolari delle intersezioni dei meridiani coi paralleli di grado in grado essendo il parallelo medio alla latitudine di 50°, i paralleli estremi alle latitudini di 35° e 71° ed i meridiani esteriori, l'orientale e l'occidentale, distanti di 40° dal meridiano centrale (6). Menzioniamo per ultimo l'HARTL (7), che di recente ha trattato distesamente della proiezione del BONNE, facendo uno studio particolare delle alterazioni lineari ed angolari a cui la stessa dà luogo e corredando il tutto di tabelle che, per la carta della Monarchia Austro-Ungarica col centro a 47° di latitudine e 36° di longitudine dall'Isola del Ferro, offrono, di grado in grado latitudinale e longitudinale, le coordinate rettangolari dei vertici della rete, le alterazioni sofferte dagli angoli dei meridiani coi paralleli, i moduli lineari principali ed il modulo lineare del meridiano.

Prima di chiudere il discorso sulla rappresentazione del BONNE osserviamo come questa sia pure nota sotto il nome di proiezione del FAMSTEED (8) modificata ed anche sotto quello di proiezione della Carta di Francia e sotto l'altro, particolarmente in Francia, di proiezione del Deposito della Guerra e come sia molto dubbio se all'autore fosse nota la principale proprietà della sua proiezione, quella cioè della conservazione delle aree. L'astronomo LA LANDE che in una sua opera (9) discorre con tanto amore

(1) Vedi il *Journal de l'École polytechnique*, Tom. XXI, p. 217, e la *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques* nei *Nouvelles annales de mathématique*, 2^a série, Tom. VIII, p. 546, e nella edizione di Parigi, 1881.

(2) *Traité des projections des cartes géographiques* par A. Germain. Paris, p. 98, 194 e 305.

(3) *Lehrbuch der Karten-Projektion* von Dr. Heinrich Gretschesel. Weimar, 1873, p. 159 193.

(4) Op. cit., p. 184.

(5) *Tablas de coordenadas rectangulares para construir el canvas de la proyeccion geografica de Bonne* nel *Boletin de la Sociedad geografica, de Madrid*, maggio, 1877.

(6) *Coordinate di Bonne calcolate di grado in grado in latitudine e longitudine supposto il parallelo medio alla latitudine di 50°*. Tale è il titolo della pubblicazione fatta quando l'Istituto calcolò le dette tavole per compilare una carta delle triangolazioni europee secondo la proiezione del BONNE e data alla luce per utilità di chi voglia costruire una carta geografica dell'Europa.

(7) Op. cit., in questo stesso §.

(8) In un prossimo § tratteremo della proiezione che molti attribuirono al FAMSTEED.

(9) *Bibliographie astronomique avec l'histoire de l'astronomie depuis 1781 jusqu'à 1802* par Jérôme De La Lande. Paris, 1803, p. 763.

della vita scientifica del BONNE ed in altra (1) dei pregi della proiezione da questo inventata per la costruzione delle carte geografiche, il MAYER che diffusamente insegna la teoria e la pratica del nuovo metodo del cartografo francese (2) per nulla accennano alla proprietà della conservazione delle aree. Ma in principio del presente secolo tale proprietà era ben nota. Della quale, come apparisce da una nota dell'attuale paragrafo, ha tenuto gran conto la Commissione per la Carta di Francia quando nel 1803 scelse per la costruzione di questa il metodo del BONNE. Ed il LACROIX nel 1802 affermava che i quadrilateri compresi tra i paralleli ed i meridiani della nuova proiezione erano equivalenti a quelli del globo (3).

§ 12. Nel trattare la questione per la quale, data la funzione lineare v di t , si cerca (§ 3) la funzione ρ , ci limitiamo al caso in cui nella (4) è costante il coefficiente di t . Ciò è dire che, indicando con λ il valore di questo coefficiente, si ha

$$(12) \quad v = \lambda t + \varphi(u).$$

E siccome l'equazione che precede la (4) dà

$$\lambda \rho \, d\rho = \mu^2 r_1 r_2 \, du,$$

così risulta

$$(13) \quad \rho^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} \int r_1 r_2 \, du + \text{cost.}$$

L'equazione (13) significa che la distribuzione dei paralleli è regolata (§ 4) come nella proiezione conica quantitativa e la (12) che i meridiani sono tutti uguali fra loro, poichè il meridiano iniziale, quando si faccia girare la figura attorno al comun centro dei paralleli per l'ampiezza λt , prende la posizione del meridiano di longitudine t .

Le (6) e (7), dicendo $\varphi'(u)$ la derivata di $\varphi(u)$, si cambiano in

$$(14) \quad \tan \delta = \frac{\lambda \rho^2 \varphi'(u)}{\mu^2 r_1 r_2},$$

$$(15) \quad m' = \frac{\mu^2 r_2}{\lambda \rho \cos \delta}, \quad m'' = \frac{\lambda \rho}{r_2};$$

così l'ultima formola significa che il modulo lineare, nella direzione dei paralleli, è lo stesso che nella proiezione conica (4).

(1) *Astronomie par M. De La Lande*, 2^a ed., Parigi, 1771, Tom. III, p. 733.

(2) Op. cit., p. 286.

(3) App. ENRICO HARTL, op. cit., p. 6.

(4) Vedi *Le Proiezioni*, ecc., Cap. III, § 5.

§ 13. Se il meridiano iniziale si proietta secondo una linea retta e da questa hanno origine gli angoli v , si ha $\varphi(u) = 0$ e quindi

$$v = \lambda t;$$

i meridiani, sono rettilinei e si ha la proiezione conica quantitativa od equivalente, già ritrovata al § 4.

§ 14. Richiegasi ora che il semimeridiano iniziale, considerando la proiezione equivalente della sfera, sia un semicircolo diviso ne' suoi gradi latitudinali.

Se si prende come origine delle v la retta che è base del semimeridiano iniziale, il raggio vettore condotto dal comun centro dei paralleli, posto nel prolungamento di essa retta, incontra la semicirconferenza dello stesso meridiano in due punti di colatitudine u e u' , e si ha $v = \frac{1}{2}(\pi - u - u')$, che è l'espressione di $\varphi(u)$. E però le (12) e (13), detta c una quantità costante (1), divengono

$$(16) \quad v = \lambda t + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(u + u'),$$

$$(17) \quad \rho^2 = \frac{a^2}{\lambda^2}(c - 2 \cos u).$$

Dicendo p e q le distanze del comun centro dei paralleli dagli estremi del diametro del meridiano, ossia dai poli australe e boreale, si ha

$$p = a \sqrt{\frac{c+2}{\lambda}}, \quad q = a \sqrt{\frac{c-2}{\lambda}};$$

ed, indicando con ρ e ρ' i raggi condotti ai punti di colatitudine u e u' , è $\rho\rho' = pq$, e quindi

$$(c - 2 \cos u)(c - 2 \cos u') = c^2 - 4,$$

che si riduce a

$$c = \frac{2(1 + \cos u \cos u')}{\cos u + \cos u'},$$

od anche

$$(18) \quad c = \frac{\cos \frac{1}{2}(u' + u)}{\cos \frac{1}{2}(u' - u)} + \frac{\cos \frac{1}{2}(u' - u)}{\cos \frac{1}{2}(u' + u)}$$

Eliminando u' fra le (16) e (18) si ha la v in funzione di u e t , e se fra le (16), (17) e (18) si eliminano le u e u' si trova l'equazione dei meridiani. I paralleli, dati dall'equazione (17), sono, com'è risaputo, archi

(1) Vedi *Le Projezioni*, ecc., Cap. III, § 25.

circolari concentrici, i semimeridiani altrettanti semicircoli, pari al semimeridiano iniziale, i cui archi, a partire dall'estremo che fa le veci del polo positivo, rappresentano le distanze polari u . Ad avere il semimeridiano di longitudine t basta far girare, come mostra la (16), il diametro del semimeridiano iniziale della quantità angolare λt e descrivere sulla sua nuova posizione il rispondente semicircolo. Con che l'equazione del meridiano viene ad essere

$$\rho^2 - \rho(p+q) \cos(v-\lambda t) + p q = 0$$

ossia

$$\rho^2 - \frac{a\rho}{\sqrt{\lambda}} \left(\sqrt{c+2} + \sqrt{c-2} \right) \cos(v-\lambda t) + \frac{a^2}{\lambda} \sqrt{c^2-4} = 0.$$

Fra tutti i paralleli havvene uno i cui raggi sono tangenti ai meridiani e che quindi li incontra ad angolo retto. Dettane U la colatitudine, per essere $u = u' = U$, dalla (18), ricavasi

$$(19) \quad c = \cos U + \frac{1}{\cos U},$$

e

$$(20) \quad \cos U = \frac{\cos \frac{1}{2}(u'+u)}{\cos \frac{1}{2}(u'-u)}$$

Perciò si ha

$$p = \frac{a(1+\cos U)}{\sqrt{\lambda \cos U}} = \frac{2a \cos^2 \frac{U}{2}}{\sqrt{\lambda \cos U}}, \quad q = \frac{a(1-\cos U)}{\sqrt{\lambda \cos U}} = \frac{2a \sin^2 \frac{U}{2}}{\sqrt{\lambda \cos U}},$$

ed il raggio del semimeridiano vale, in proiezione, $a \sqrt{\frac{\cos U}{\lambda}}$, essendo il

suo centro distante dal comun centro dei paralleli della quantità $\frac{a}{\sqrt{\lambda \cos U}}$.

Ecco altre espressioni pel raggio ρ . Eliminando la c fra le (17) e (18) si trova

$$\rho^2 = \frac{a^2 \sin^2 u}{\lambda \cos \frac{1}{2}(u'+u) \cos \frac{1}{2}(u'-u)}$$

e quindi

$$\rho = \frac{a \sin u}{\cos \frac{1}{2}(u'+u)} \sqrt{\frac{\cos U}{\lambda}} = \frac{a \sin u}{\cos \frac{1}{2}(u'-u)} \frac{1}{\sqrt{\lambda \cos U}}$$

L'alterazione δ sofferta dall'angolo retto del meridiano col parallelo u è data (§ 3) dall'angolo che il raggio vettore condotto ai punti di colatitudine u e u' fa colla tangente tirata per uno di questi punti. Per ciò è

$$(21) \quad \delta = \frac{1}{2} (u' - u)$$

Dalle (15) ed in virtù delle (20) e (21) e delle precedenti espressioni di ρ si ricavano pei moduli m' e m'' del meridiano e del parallelo le formole

$$m'^2 = \frac{\cos U}{\lambda} = \frac{\cos \frac{1}{2} (u' + u)}{\lambda \cos \frac{1}{2} (u' - u)},$$

$$m''^2 = \frac{\lambda}{\cos U \cos^2 \frac{1}{2} (u' - u)} = \frac{\lambda \cos U}{\cos^2 \frac{1}{2} (u' + u)} = \frac{\lambda}{\cos \frac{1}{2} (u' + u) \cos \frac{1}{2} (u' - u)}.$$

La espressione di m' , alla quale si arriva subito osservando che i semimeridiani sono uguali al semicircolo di raggio $a \sqrt{\frac{\cos U}{\lambda}}$, significa la costanza del modulo lineare nella direzione dei meridiani. Per l'altra di m'' vale anche la formola del § 12.

Note le costanti λ e c , fissato il punto C che è centro della proiezione, descritto il semimeridiano iniziale per mezzo delle formole che ne danno il raggio e la distanza del centro dal punto C , divisane la semicirconferenza ne' suoi 180 gradi, i paralleli passano pe' suoi punti di divisione avendo il comun centro in C , e facile torna la descrizione dei meridiani sapendo che ad avere quello di longitudine t basta far girare il diametro del semimeridiano iniziale intorno al punto C della quantità angolare λt e descrivere sulla sua nuova posizione il rispondente semicircolo.

Foggiandosi i paralleli ad archi circolari concentrici ed essendo i meridiani la genuina riproduzione del meridiano iniziale girante intorno al centro di quegli archi, la proiezione viene ad assumere la forma di un anello o di un suo segmento e però può benissimo dirsi anulare.

Le costanti λ e c si determinano da particolari condizioni come nei seguenti esempi.

§ 15 *Le dilatazioni lineari sono nulle sui paralleli di colatitudine u_1 e u_2 .*

Siccome il modulo lineare del parallelo in questa proiezione è (§ 12) lo stesso che nella proiezione conica, così valgono le espressioni altrove rinvenute (1) che sono

(1) Vedi *Le Proiezioni*, ecc., Cap. III, § 28.

$$\lambda = \cos \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2),$$

$$c = \frac{\cos \frac{1}{2} (u_1 + u_2)}{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)} + \frac{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)}{\cos \frac{1}{2} (u_1 + u_2)}.$$

Alla colatitudine U data da

$$\cos U = \frac{\cos \frac{1}{2} (u_1 + u_2)}{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)}$$

il parallelo incontra i meridiani ad angolo retto.

Ai meridiani compete il modulo costante

$$m' = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)},$$

ai paralleli il variabile

$$m'' = \frac{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)}{\cos \delta} = \frac{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)}{\cos \frac{1}{2} (u' - u)},$$

che alla colatitudine U acquista il valore minimo pari a $\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)$ e reciproco del costante modulo dei meridiani.

I raggi dei paralleli u_1 e u_2 sono

$$\rho_1 = \frac{a \sin u_1}{\lambda}, \quad \rho_2 = \frac{a \sin u_2}{\lambda},$$

le distanze p e q dei poli australe e boreale dal centro della proiezione si hanno da

$$p = \frac{2 a \cos^2 \frac{U}{2}}{\cos \frac{1}{2} (u_1 + u_2)}, \quad q = \frac{2 a \sin^2 \frac{U}{2}}{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)}.$$

il semimeridiano ha il raggio uguale a $\frac{a}{\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)}$ ed il centro distante

dal centro ora nominato di $\frac{a}{\cos \frac{1}{2} (u_1 + u_2)}$.

Nel comporre la mappa, stabilito il centro C della proiezione e preso per unità il grado equatoriale, si tracci il semi meridiano iniziale in base delle espressioni or ora trovate e si descrivano gli archi dei paralleli per mezzo della (17), ponendo in questa ed in quelle $\frac{180}{\pi}$ in luogo di α . Del rimanente, in virtù della costanza del modulo m' , basta dividere il semi meridiano iniziale ne' suoi 180 gradi, che sono appunto quelli di colatitudine, per avere i punti pei quali passano i paralleli aventi il comun centro in C . Se, poi, si conduce un arco concentrico ai paralleli pel centro del meridiano iniziale ed, a partire da questo centro, vi si portano tante parti uguali a $\frac{\lambda}{\cos \frac{1}{2} (u_1 + u_2)}$, ossia a $\cos \frac{1}{2} (u_1 - u_2)$, si hanno

nei punti di divisione i centri dei semicircoli che rappresentano, di grado in grado, i meridiani e che torna facile descrivere poichè pel centro della proiezione passano i prolungamenti dei loro diametri. Dei quali la posizione si ottiene anche per altra via. Invero, portando a partire dal meridiano iniziale, sopra gli archi dei paralleli u_1 e u_2 tante parti uguali a $\sin u_1$ e $\sin u_2$ si hanno altrettante coppie di punti sulle cui congiungenti, che passano pel centro C , torna facile fissare i diametri dei semimeridiani.

§ 16. *Sul parallelo di colatitudine U sono conservati i gradi di longitudine ed i meridiani lo incontrano ad angolo retto.*

Queste due condizioni danno

$$\lambda = \cos U, \quad c = \cos U + \frac{1}{\cos U}.$$

Ai meridiani compete il modulo

$$m' = 1,$$

per cui le distanze sono conservate nella loro direzione ed i meridiani obbiettivi sono riprodotti nella proiezione, ai paralleli il modulo

$$m'' = \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} (u' - u)},$$

dal che segue essere alla colatitudine U nulle le alterazioni lineari ed angolari.

L'equazione che (§ 1) fa conoscere i moduli principali m_1 e m_2 quando sono noti i moduli m' e m'' dà, come al § 8),

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} = \pm \frac{1}{2} \tan \vartheta + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \vartheta}$$

Quanto alle direzioni principali valgono le formole del § 1. E però

la direzione di modulo m_1 fa col meridiano l'angolo obbiettivo ω_1 ed il subbiettivo Ω_1 dati da

$$\tan \omega_1 = \pm m_1 = \pm \frac{1}{m_2}$$

$$\tan \Omega_1 = \pm m_2 = \pm \frac{1}{m_1},$$

i quali angoli si ricavano anche da

$$\tan 2\omega = -\frac{2}{\tan \delta},$$

$$\tan 2\Omega = \frac{2}{\tan \delta}.$$

Per trovare il semierrore ε dell'angolo più sformato si ha

$$\tan \varepsilon = \frac{1}{2} \tan \delta.$$

Ed i lati di siffatto angolo, che sono le linee di massimo deviazione dalle direzioni principali e coincidono colle tangenti alle curve isoperimetre, di cui una si confonde col meridiano, fanno colla direzione principale m_1 l'angolo obbiettivo ψ_1 ed il subbiettivo Ψ_1 somministrati dalle stesse formole che danno ω_1 e Ω_1 . Perciò, in virtù di note relazioni, è

$$\omega_1 = \psi_1 = 45^\circ + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Omega_1 = \Psi_1 = 45^\circ - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\frac{m_1}{m_2} \left\{ \begin{array}{l} = \tan \left(45^\circ + \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ = \tan \left(45^\circ - \frac{\varepsilon}{2} \right) \end{array} \right.$$

La tangente alla curva che, al pari del meridiano, è isoperimetra fa con questo l'angolo $90^\circ \pm \varepsilon$ secondo che si ha riguardo alla superficie obbiettiva od alla subbiettiva, il quale è l'angolo soggetto alla massima alterazione e diviso per mezzo della direzione di modulo m_1 .

L'equazione delle curve isoperimetre essendo (1)

$$\frac{dt}{du} = -\frac{r_1}{r_2} \tan 2\omega,$$

pel meridiano che è una di tali curve si ha $\omega = 0$ e quindi $t = \text{cost.}$, per

l'altra $\tan 2\omega = -\frac{2}{\tan \delta}$, e quindi, per essere $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sin u}$,

$$dt = \frac{2 du}{\tan \delta \sin u}.$$

(1) *Le Profezioni*, ecc., Cap. I, § 25.

Le distanze dei poli australe e boreale dal centro della proiezione sono

$$p = \frac{2a \cos^2 \frac{U}{2}}{\cos U}, \quad q = \frac{2a \sin^2 \frac{U}{2}}{\cos U};$$

il raggio del semimeridiano è a , il suo centro dista dal comun centro dei paralleli di $\frac{a}{\cos U}$ ed il raggio del parallelo U vale $a \tan U$.

Il semimeridiano iniziale ed i paralleli si tracciano come s'è detto al § precedente, avvertendo che la costruzione si semplifica perchè quello è la genuina riproduzione del meridiano obbiettivo e questi hanno il comun centro là dove il diametro polare è incontrato della tangente tirata al meridiano pel punto di colatitudine U . I meridiani poi si descrivono col ricorrere ancora all'arco circolare concentrico condotto pel centro del meridiano iniziale, oppure al parallelo U , bastando portare, a partire dal nominato centro, su quell'arco i gradi di latitudine di questo, oppure sul parallelo U tante parti uguali a $\sin U$, poichè si ottengono, nell'una e nell'altra maniera, altrettanti punti che offrono il modo di fissare i diametri dei singoli meridiani.

La proiezione studiata in questo paragrafo fu trattata sotto altro punto di vista dal VIECHEL (1).

§ 17. Nel caso di $\lambda = 1$ i paralleli sono intiere circonferenze concentriche condotte pei punti di divisione del semimeridiano iniziale partito ne' suoi 180 gradi ed i semimeridiani altrettanti semicircoli uguali all'iniziale col centro nei punti di divisione della circonferenza concentrica ai paralleli, condotta pel centro del meridiano iniziale e divisa ne' suoi 180 gradi.

A determinare la costante c vogliasi che le dilatazioni lineari sieno uguali sui paralleli u_1 e u_2 . Ciò dà

$$c = \frac{\cos \frac{1}{2}(u_1 + u_2)}{\cos \frac{1}{2}(u_1 - u_2)} + \frac{\cos \frac{1}{2}(u_1 - u_2)}{\cos \frac{1}{2}(u_1 + u_2)};$$

e la colatitudine U del parallelo incontrato normalmente dai meridiani è somministrata da

$$\cos U = \frac{\cos \frac{1}{2}(u_1 + u_2)}{\cos \frac{1}{2}(u_1 - u_2)}.$$

(1) *Rationelle Gradnetzprojektionen in Der Civilingenieur, Jahrgang 1879.* Lipsia, 1879.

Chi ami le distanze conservate nel, dato parallelo u_1 trova

$$c = \operatorname{sen}^2 u_1 + 2 \cos u_1$$

Se, poi, alla colatitudine data U il parallelo deve incontrare i meridiani ad angolo retto, trovasi

$$c = \cos U + \frac{1}{\cos U}$$

§ 18. Alla rappresentazione delle regioni polari giova la coincidenza del centro della proiezione col polo. Se, dunque, si fa cadere il comun centro de' paralleli nel polo, si ha

$$c = 2$$

e quindi le coordinate polari del punto generale sono

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen} \frac{u}{2},$$

$$v = \lambda t + \frac{\pi}{2} - u.$$

La prima delle quali equazioni spetta al parallelo di colatitudine u ; ed eliminando fra le stesse la u si trova l'equazione del meridiano di longitudine t essere

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{\lambda}} \cos(v - \lambda t).$$

L'alterazione δ , a cui soggiace l'angolo del meridiano col parallelo, si ha da

$$\delta = -\frac{u}{2};$$

è nulla al polo com'è confermato dalla (19) che dà $U = 0$, e cresce col crescere della distanza polare.

È costante il modulo del meridiano e pari a

$$m' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

variabile quello del parallelo che è

$$m'' = \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos \frac{u}{2}}.$$

Il raggio del semimeridiano è $\frac{a}{\sqrt{\lambda}}$.

Ecco, intanto, il modo di tracciare la rete de' meridiani e paralleli.

Preso per unità il grado equatoriale, si descriva il semimeridiano iniziale col raggio $\frac{180}{\pi \sqrt{\lambda}}$, vi si segnino i 180 gradi di colatitudine e si conducano, pei punti di divisione, i paralleli che sono archi circolari col comun centro nel polo. Ad avere i centri dei meridiani di grado in grado bisogna portare sul parallelo di 60° di colatitudine ed a partire dal centro del semimeridiano iniziale, pel quale esso transita, tante parti uguali a $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, con che sarà, poi, facile farne la descrizione.

A determinare la costante λ valga la condizione della conservazione delle distanze sul parallelo u_1 . Ciò dà

$$\lambda = \cos^2 \frac{u_1}{2}.$$

Se, invece, si ha l'altra condizione che alla colatitudine u_2 l'alterazione lineare del parallelo deve uguagliare quella del meridiano, trovasi

$$\lambda = \cos \frac{u_2}{2}.$$

§ 19. Quando i paralleli debbono essere rappresentati da intiere circonferenze ed avere il loro comun centro nel polo, con che l'aspetto della proiezione diventa del tutto polare, risulta

$$\lambda = 1, \quad c = 2.$$

Quindi è

$$\rho = 2a \sin \frac{u}{2},$$

$$v = t + \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}.$$

La prima di queste equazioni spetta ai paralleli, ed ai meridiani compete la

$$\rho = 2a \cos (v - t).$$

L'alterazione δ seguita, come nel caso precedente, ad essere espressa da

$$\delta = -\frac{u}{2},$$

ed i moduli del meridiano e del parallelo sono

$$m' = 1, \quad m'' = \frac{1}{\cos \frac{u}{2}}.$$

Adunque le distanze sono conservate sui meridiani che sono uguali agli obbiettivi, amplificate sui paralleli secondo il trovato rapporto che al polo uguaglia l'unità e cresce col crescere della distanza polare. Qui sono per-

fettamente applicabili le formole trovate al § 16, e vevoli alla ricerca dei moduli principali e delle loro direzioni, del semiangolo dell'angolo più sformato, delle direzioni dei lati di questo angolo coincidenti colle tangenti alle curve isoperimetre e che sono quelle soggette alla massima deviazione dalle direzioni principali. E si ha che per ciaschedun punto passano due curve isoperimetre, delle quali l'una coincide col meridiano e l'altra ha per equazione

$$dt = - \frac{2 du}{\operatorname{sen} u \tan \frac{u}{2}},$$

ossia

$$dt = - \frac{du}{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}},$$

che, per via d'integrazione, somministra

$$t = 2 \cot \frac{u}{2} + \text{cost},$$

e che, dicendo u_1 e t_1 le coordinate geografiche del punto per cui si considera passare la curva, diviene

$$t - t_1 = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (u_1 - u)}{\operatorname{sen} \frac{u_1}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2}}.$$

Secondo quale curva si proietta la lossodromia? La sua equazione in coordinate geografiche essendo

$$t - t_1 = \tan i \log \frac{\cot \frac{u}{2}}{\cot \frac{u_1}{2}},$$

dove u_1 e t_1 sono la colatitudine e la longitudine di un dato punto per cui passa la curva e i è l'angolo costante sotto il quale ne sono incontrati, sulla sfera, i meridiani (1), si trova, avuto riguardo alle superiori espressioni di ρ e v ,

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\sqrt{4a^2 - \rho_1^2}} = \frac{4a^2}{\rho_1 \sqrt{4a^2 - \rho_1^2}} \operatorname{sen} \left(v - v + \tan i \log \frac{\rho_1 \sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho \sqrt{4a^2 - \rho_1^2}} \right),$$

che è, in coordinate polari, l'equazione della richiesta curva (2).

(1) *Le Proiezioni*, ecc. Cap. I, § 21

(2) Essendo dati sulla carta due punti M_1 e M_2 , si può dire che, tirati gli archi di meridiano e di

Tracciato il meridiano iniziale, dettane O il centro e P il polo boreale, fattane la divisione ne' suoi 180 gradi di latitudine, le circonferenze condotte pe' suoi punti di divisione e col comun centro in P rappresentano i paralleli E se, a partire dal punto O , si divide la periferia del parallelo distante di 60° dal polo ne' suoi 360 gradi di longitudine, si hanno altrettanti punti che sono i centri dei 360 meridiani, così facili a descriversi. In tale modo si ottiene la proiezione di tutta la sfera. Ma meglio è, volendo fare il mappamondo, rappresentare a parte ciascun emisfero.

Ecco, intanto, la tavola che, per $\alpha = 1$ e di 10° in 10° di colatitudine, dà i valori del raggio ρ , dei moduli principali m_1 e m_2 , del modulo m'' del parallelo, del modulo angolare p e del semierrore ε dell'angolo più sformato.

u	ρ	m_1	m_2	m''	p	ε
0°	0,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0°, 00'. 00"
10	0,17431	1,04469	0,95721	1,00382	1,09139	2. 30. 17
20	0,37730	1,09204	0,91572	1,01543	1,19256	5. 02. 18
30	0,51764	1,14291	0,87496	1,03528	1,30624	7. 37. 50
40	0,68404	1,19841	0,83444	1,06418	1,43628	10. 18. 51
50	0,84524	1,25997	0,79367	1,10338	1,58753	13. 07. 27
60	1,00000	1,32950	0,75216	1,15470	1,76758	16. 06. 07
70	1,14715	1,40962	0,70941	1,22077	1,98702	19. 17. 43
80	1,28558	1,50399	0,66490	1,30540	2,26198	22. 45. 37
90	1,41421	1,61803	0,61803	1,41421	2,61803	26. 33. 54
100	1,53209	1,75995	0,56820	1,55572	3,09743	30. 47. 23
110	1,63830	1,94284	0,51471	1,74345	3,77465	35. 31. 46
120	1,73205	2,18889	0,45685	2,00000	4,79128	40. 53. 36
130	1,81262	2,53845	0,39394	2,36620	6,44373	46. 59. 49
140	1,87938	3,07289	0,32541	2,92380	9,44310	53. 56. 51
150	1,93185	3,98309	0,25106	3,86370	15,86498	61. 48. 47
160	1,96962	5,84248	0,17116	5,75877	34,13460	70. 34. 29
170	1,99239	11,51686	0,08083	11,47371	132,63815	80. 04. 30
180	2,00000	∞	0,00000	∞	∞	90. 00. 00

Il confronto della proiezione polare equivalente della sfera (1) col l'attuale rappresentazione mostra che ambe conservano al polo e distanze ed angoli, che le alterazioni lineari ed angolari crescono, più fortemente in questa che in quella, col crescere della distanza polare e che ambe hanno i paralleli soggetti ad uguali dilatazioni Vero è che nella presente proiezione le distanze sono conservate nella direzione dei meridiani mentre nell'altra soggiacciono a raccorciamenti, ma vediamo, per altra parte, i paralleli tagliare i meridiani, non più normalmente come nella ricordata pro-

parallelo pei due punti in guisa da formare un quadrangolo, fattane la divisione in n parti uguali e condotti pei loro punti di partizione i rispondenti archi di parallelo e di meridiano, la proiezione della losso-dromia altro non sia che la linea congiungente i successivi incontri degli n paralleli cogli n meridiani? È vero ciò? No! E sarebbe cosa ben facile darne la dimostrazione.

(1) *Le Proiezioni*, ecc., Cap. III, § 34.

jezione, bensì ad angolo che sempre più si scosta dal retto coll'aumentare della distanza dal polo. E per ciò pensiamo che alla proiezione ora studiata sia da preferirsi la polare equivalente a meridiani rettilinei.

La esposta proiezione ha molta simiglianza con certe rappresentazioni immaginate da ORONZIO FINEO nel secolo XVI. Basterebbe confrontare, per esserne convinti, la mappa dell'emisfero ottenuta per via del metodo or ora indicato colle mappe del cartografo francese riprodotte nell'atlante annesso al libro: *Le proiezioni delle carte geografiche* (1). Non è molto che la stessa fu escogitata da due cultori della cartografia. L'ingegnere WIECHEL la trovò nello studiare certe proiezioni equivalenti e particolarmente anulari (2). E, poco tempo dopo, il professore PANIGHETTI, nulla sapendo degli studi del cartografo tedesco, propose la medesima proiezione per la mappa dell'emisfero e la presentò al Congresso geografico internazionale tenuto a Venezia nel 1881 (3).

III.

Proiezioni e paralleli rettilinei.

§ 20. Proprietà e formole generali. — § 21. Proiezioni cilindriche. — § 22. Proiezioni cilindriche trasverse. — § 23. Proiezioni trasverse quantitative ed equivalenti. — § 24. Proiezioni cilindriche inverse ed in particolare delle quantitative ed equivalenti. — § 25. Proiezione a meridiani rettilinei convergenti del COLLIGNON. — § 26. Proiezione a meridiani elittici del MOLLWEID. — § 27. Proiezione del DE PRÉPÉTIT FOUCAUT. — § 28. Proiezione in cui le distanze dei paralleli sono proporzionali ai loro intervalli sulla superficie obbiettiva. — § 29. Semplificazione della proiezione precedente rendendola equivalente e conservando gl'intervalli obbiettivi dei paralleli. Applicazioni di questa proiezione fatte prima dal MERCATORE, poi dal SANSON, da altri e dal FLAMSTEED. — § 30. Proiezione della Carta d'Italia alla scala di 1:100,000. — § 31. Proiezione a meridiani curvilinei uguali fra loro. — § 32. Proiezione della sfera a semimeridiani circolari. — § 33. Proiezione della sfera a semimeridiani circolari uguali agli obbiettivi. — § 34. Proiezione mista e parzialmente quantitativa di alcuni mappamondi ovali a meridiani circolari del secolo XVI.

§ 20. Le rappresentazioni in cui i paralleli si adagiano secondo rette parallele sono un caso particolare delle proiezioni a paralleli circolari concentrici. Basta trasportare il comun centro di tali circoli a distanza infinita per passare da queste a quelle. Per amore di chiarezza ed anche di brevità ne facciamo diretta trattazione. Tuttavia osserviamo che le proprietà spettanti alle rappresentazioni a paralleli circolari con centro comune, quando dalla posizione di questo sieno indipendenti, debbono pure appartenere alle proiezioni di cui prendiamo a discorrere.

(1) Delle proiezioni del FINEO abbiamo trattato al Cap. VIII, § 30 del citato libro.

(2) *Rationelle Gradnetzprojektionen* in *Der Civilingenieur Jahrgang 1879*. Lipsia 1879.

(3) Vedi la pubblicazione della Società Geografica Italiana: *Terzo Congresso Geografico Internazionale*. Roma, 1884, vol. 2°, p. 3.

Assumendo come asse delle X una retta perpendicolare alla direzione dei paralleli, la X risulta funzione della sola latitudine l , si ha cioè:

$$(22) \quad X = X(l)$$

e dalla (1) ricavasi

$$(23) \quad Y = \frac{\mu^2 r_1 r_2 dl}{dX} t + \varphi(l),$$

dove Y è una funzione lineare di t e la φ è una funzione arbitraria, proveniente dall'integrazione, che si determina dalla conoscenza della linea secondo cui si proietta un dato meridiano e che riducesi ad una costante quando il meridiano iniziale è una retta perpendicolare alla direzione dei paralleli. La quale costante, prendendo questa retta come asse delle X , si annulla; e così rimane semplificata la (23).

Le (22) e (23) offrono le coordinate rettangolari del punto generale della rappresentazione in funzione delle coordinate geografiche. Data l'una equazione si trova l'altra. La (22) è l'equazione dei paralleli; quella dei meridiani si ottiene eliminando la l fra le (22) e (23) e risulta dalla forma:

$$(24) \quad Y = \mu^2 t \psi(X) + \theta(X).$$

Se è nota la legge di distribuzione dei paralleli si trova l'equazione de' meridiani; e se si conosce la legge da cui questi sono governati si rinviene come sono distribuiti i paralleli.

Considerando sul parallelo l i punti di longitudine t e t' , la (25) dà:

$$Y - Y' = \frac{\mu^2 r_1 r_2 dl}{dX} = r_2 (t - t');$$

ciò significa che, conformemente al caso dei paralleli circolari concentrici, le proiezioni degli archi dei paralleli sono proporzionali agli archi obbiettivi, che, cioè, i gradi di ciascun parallelo, come sullo sferoide, sono uguali fra loro in sulla carta e che il modulo lineare competente ad un dato parallelo è

costante ed uguale a $\frac{Y - Y'}{r_2(t - t')}$, ossia a $\frac{\mu^2 r_1 dl}{dX}$. E però, note le proiezioni di

due dati meridiani, se si dividono i segmenti dei paralleli da questi compresi in tante parti uguali quanti sono i gradi contenuti in $t - t'$, le linee congiungenti i punti di uguale divisione offrono i rispondenti meridiani; i rimanenti si ottengono protraendo le divisioni dei paralleli oltre gli accennati limiti e congiungendo con opportune linee i punti omonimi.

Proiettandosi il meridiano iniziale secondo una retta perpendicolare ai paralleli, il modulo lineare a questi spettante, che è $\frac{\mu^2 r_1 dl}{dX}$, uguaglia $\frac{Y}{r_2 t}$,

e basterà la conoscenza della curva secondo la quale si proietta un dato meridiano per potere tracciare tutte le altre linee di uguale longitudine.

L'angolo I del meridiano col parallelo, che sullo sferoide è retto, in proiezione è dato (1) da

$$\tan I = \frac{\frac{dX}{dl}}{\frac{dY}{dl}};$$

e l'alterazione δ a cui lo stesso angolo soggiace nel passare dallo sferoide alla rappresentazione si ha da

$$\tan \delta = \frac{\frac{dY}{dl}}{\frac{dX}{dl}}.$$

Con che I e δ sono gli angoli fatti dalla tangente al meridiano cogli assi delle Y e delle X .

I moduli lineari m' e m'' competenti al meridiano ed al parallelo, in virtù della relazione $m' m'' \cos \delta = \mu^2$ e della precedente espressione del modulo del parallelo, sono

$$m' = \frac{dX}{r_1 dl \cos \delta}, \quad m'' = \frac{\mu^2 r_1 dl}{dX}.$$

Se il meridiano iniziale è perpendicolare ai paralleli, si ha pure

$$m' = \frac{\mu^2 r_2 t}{Y \cos \delta}, \quad m'' = \frac{Y}{r_2 t}.$$

Le relazioni fra il modulo m e gli azzimutti obbiettivo ω e subbiettivo Ω della rispondente direzione, come pure le formole che riguardano le direzioni principali ed i loro moduli m_1 e m_2 sono quelle riferite al § 1.

§ 21. Come esempio della ricerca della legge di distribuzione dei paralleli essendo nota la legge di rappresentazione dei meridiani, si consideri il caso in cui questi sono rettilinei e perpendicolari ai paralleli. Facendo coincidere l'asse delle X col meridiano iniziale e dicendo α un coefficiente costante si ha

$$Y = \alpha t.$$

E però dalla (24), in cui $\phi(l)$ si annulla, ricavasi

$$dX = \frac{\mu^2}{\alpha} r_1 r_2 dl,$$

(1) *Le proiezioni*, ecc., Cap. I, § 1.

e quindi, integrando e ponendo all'equatore l'origine delle X ,

$$X = \frac{\mu^2}{\alpha} \int_0^l r_1 r_2 d\ell,$$

Nelle espressioni di X e Y si hanno le equazioni generali della proiezione cilindrica quantitativa, come pure della equivalente in rispondenza di $\mu^2 = 1$ (1). E qui ci piace ricordare che diconsi cilindriche quelle proiezioni in cui i paralleli sono rette parallele fra loro ed i meridiani rette pure fra loro parallele, perpendicolari alle precedenti, ed equidistanti se per uguali gradi di longitudine distano i meridiani obbiettivi.

§ 22. Altre proiezioni di simil genere si hanno per la sfera. In vero chi consideri sopra questa una circonferenza massima C , il suo polo q ed i loro azzimutti ed almicantaratti può benissimo formare una rappresentazione in cui gli almicantaratti sieno rette parallele fra loro e gli azzimutti rette pure parallele, perpendicolari alle precedenti e distanti fra loro di quantità proporzionali alle differenze degli angoli azzimuttali obbiettivi. E però assumendo, in proiezione, come asse delle X l'uno degli almicantaratti, o meglio la retta che rappresenta la circonferenza C , come asse delle Y l'azzimutto iniziale, dicendo λ la distanza di un punto m della sfera dalla circonferenza C , ossia l'arco di circolo massimo calatovi perpendicolarmente da m , e τ la distanza del piede della perpendicolare dal punto o della circonferenza pel quale passa l'azzimutto iniziale, distanza che misura l'angolo dell'azzimutto del punto m coll'azzimutto iniziale, ed indicando con α un coefficiente centrale, si ha

$$(25) \quad X = \alpha \tau, \quad Y = Y(\lambda),$$

che esprimono le coordinate X e Y in funzione delle coordinate sferiche λ e τ .

La prima è l'equazione degli azzimutti, la seconda spetta agli almicantaratti. La funzione Y , che di questi governa la distribuzione, si determina in base a qualche condizione generale, ed il coefficiente α , che regola le distanze degli azzimutti, in virtù di qualche peculiare condizione.

Le rappresentazioni così fatte possono nomarsi proiezioni cilindriche transverse per distinguerle dalle altre dette semplicemente cilindriche. Non è forse vero che come qualsiasi proiezione cilindrica può ritenersi una modificazione della proiezione generata dallo sviluppo del cilindro circoscritto secondo l'equatore, o penetrante secondo un parallelo, così le rappresentazioni in discorso si possono considerare quali modificazioni delle proiezioni originate dallo sviluppo del cilindro inscritto secondo un dato almican-

(1) Vedi *Le proiezioni*, ecc., Cap. IV, Art. IV, dove si tratta distesamente di siffatte proiezioni.

taratte, o circoscritto secondo un circolo massimo, che ha, rispetto all'equatore, una posizione trasversale?

Nello stesso modo che nelle proiezioni cilindriche i meridiani ed i paralleli ne sono le direzioni principali, nelle cilindriche transverse queste si hanno negli azzimutti e negli almicantaratti e dicendo m_1 e m_2 i moduli loro rispondenti, si ha

$$(26) \quad m_1 = \frac{1}{a} \frac{dY}{d\lambda}, \quad m_2 = \frac{\alpha}{a \cos \lambda}.$$

Gli almicantaratti e gli azzimutti rispondenti al polo q della circonferenza massima C stabiliscono un sistema di linee coordinate; e la posizione di un punto m della sfera è determinata dalle due coordinate sferiche λ e τ , le quali ne fissano l'almicantaratte e l'azzimutto. Ed ecco sorgere la questione: Data la latitudine l e la longitudine t del punto m , trovarne le coordinate λ e τ , e l'altra in cui, date λ e τ , si vogliono le l e t .

Si considerino (1) il polo geografico p , il polo q della circonferenza massima C ed il polo o del meridiano pq posto nell'incontro della circonferenza C coll'azzimutto qo perpendicolare al meridiano pq e si ponga l'origine delle τ in o , delle longitudini t nel meridiano op . L'arco di azzimutto qm che va dal polo q al punto m e gli archi di meridiano pq e pm formano il triangolo mpq , in cui, osservando che il triangolo opq è birettangolo in p e q e che l'angolo dei due azzimutti qo e qm è uguale a τ , dicendo l' la latitudine nota del punto q , ossia del polo della circonferenza C , è $pq = 90^\circ - l'$, $pm = 90^\circ - l$, $qm = 90^\circ - \lambda$ e gli angoli in p e q sono $90^\circ - t$ e $90^\circ - \tau$. E però, come mostrano le ordinarie formole della trigonometria sferica, a risolvere la prima questione valgono le

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \lambda = \sin l \sin l' + \sin t \cos l \cos l', \\ \tan \tau = \frac{\tan l \cos l' - \sin t \sin l'}{\cos t}, \end{array} \right.$$

e per la seconda si ha

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin l = \sin \lambda \sin l' + \sin \tau \cos \lambda \cos l', \\ \tan t = \frac{\tan \lambda \cos l' - \sin \tau \sin l'}{\cos \tau}. \end{array} \right.$$

Del rimanente, trovato λ nel primo caso, ovvero l nel secondo, a calcolare τ , ovvero t , serve l'analogia dei quattro seni che dà

$$\frac{\cos \tau}{\cos t} = \frac{\cos l}{\cos \lambda},$$

(1) La figura a cui mentalmente ci riferiamo può essere dal lettore in modo facile costruita.

Le (25), ricorrendo alle (27), somministrano le X e Y in funzione delle coordinate geografiche. Ed, eliminando fra le due equazioni così ottenute la t , ovvero la l , si trova la curva dei paralleli, ovvero dei meridiani. Le equazioni delle quali curve si ottengono anche, e più facilmente, sostituendo nelle (28) i valori di λ e τ ricavati dalle (25). Ma la costruzione dei meridiani e paralleli giovava ben poco delle loro equazioni; meglio è eseguirle per punti. A tale fine trovate le coordinate geografiche dei vertici della loro rete, e quindi per mezzo delle (27) le λ e τ , le (35) ne fanno conoscere le coordinate rettangolari X e Y . Le quali offrono il destro di collocare sulla carta i nominati vertici, la cui opportuna congiunzione dà luogo alle linee di latitudine e di longitudine.

La proiezione cilindrica transversa riesce vantaggiosa per le carte di strette e lunghe zone terrestri non parallele all'equatore; ed è utile che la circonferenza massima C , su cui si contano le τ , attraversi mediamente la zona.

La quale circonferenza sarà, in generale, determinata da due dati luoghi; e bisognerà trovare la latitudine del suo polo, come pure la longitudine, per potere indi stabilire il meridiano iniziale, che nelle formole precedenti abbiamo collocato ad angolo retto col meridiano del detto punto q . Il problema, dunque, da risolvere è il seguente:

Date le coordinate geografiche (l_1, t_1) e (l_2, t_2) di due punti α_1 e α_2 , trovare la latitudine l' e la longitudine t' del polo q della loro circonferenza massima.

Intendendo congiunti i punti α_1 e α_2 col polo q per mezzo degli archi azzimuttali $q\alpha_1$ e $q\alpha_2$, ambi di 90° , e col polo geografico p per mezzo degli archi di meridiano $p\alpha_1$ e $p\alpha_2$, uguali a $90^\circ - l_1$ e $90^\circ - l_2$, i due triangoli sferici $p q \alpha_1$ e $p q \alpha_2$ hanno gli angoli in p uguali a $t_1 - t'$ e $t_2 - t'$, il lato comune $p q = 90^\circ - l'$ e danno

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} l' \operatorname{sen} l_1 + \cos l' \cos l_1 \cos (t_1 - t') &= 0, \\ \operatorname{sen} l' \operatorname{sen} l_2 + \cos l' \cos l_2 \cos (t_2 - t') &= 0, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \cos t' \cos t_1 + \operatorname{sen} t' \operatorname{sen} t_1 &= -\tan l' \tan l_1, \\ \cos t' \cos t_2 + \operatorname{sen} t' \operatorname{sen} t_2 &= -\tan l' \tan l_2, \end{aligned}$$

da cui si trae

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} (t_2 - t_1) \cos t' &= -\tan l' (\operatorname{sen} t_1 \tan l_2 - \operatorname{sen} t_2 \tan l_1), \\ \operatorname{sen} (t_2 - t_1) \operatorname{sen} t' &= -\tan l' (\cos t_1 \tan l_2 - \cos t_2 \tan l_1), \end{aligned}$$

e finalmente

$$\tan t' = -\frac{\cos t_1 \tan l_2 - \cos t_2 \tan l_1}{\operatorname{sen} t_1 \tan l_2 - \operatorname{sen} t_2 \tan l_1}.$$

$$\tan l' = \frac{\sin(t_2 - t_1)}{\sqrt{\tan^2 l_1 + \tan^2 l_2 - 2 \tan l_1 \tan l_2 \cos(t_2 - t_1)}}$$

Il valore di l' si calcola facilmente ricorrendo alle tavole dei logaritmi di addizione e sottrazione; quello di l , quando siasi già trovato l' , può anche aversi da

$$\tan l' = -\cot l_1 \cos(t_1 - l') = -\cot l_2 \cos(t_2 - l').$$

§ 23. Le usuali proiezioni cilindriche che sono la equidistante, la quantitativa, sotto cui comprendesi la equivalente, e la isogonica, detta anche proiezione del MERCATORE, danno luogo ad altrettante omonime proiezioni cilindriche transverse. Qui ci occupiamo soltanto delle quantitative e delle equivalenti. Le quantitative sono governate da

$$(29) \quad X = \alpha \tau, \quad Y = \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} \sin \lambda.$$

E, se le X e Y si vogliono esprimere in funzione delle coordinate geografiche, si ha

$$(30) \quad \begin{cases} \tan \frac{X}{\alpha} = \frac{\tan l \cos l' - \sin t \sin l'}{\cos t}, \\ Y = \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} (\sin l \sin l' + \sin t \cos l \cos l'). \end{cases}$$

Ricorrendo alle (28) si trova che l'equazione del parallelo di latitudine l è

$$(31) \quad \alpha Y \sin l' + \sqrt{\mu^4 a^4 - \alpha^2 Y^2} \sin \frac{X}{\alpha} \cos l' = \mu^2 a^2 \sin l,$$

e che pel meridiano di longitudine t si ha

$$(32) \quad \left(\sin \frac{X}{\alpha} \sin l' + \cos \frac{X}{\alpha} \tan t \right) \sqrt{\mu^4 a^4 - \alpha^2 Y^2} = \alpha Y \cos l'$$

I moduli principali sono dati da

$$m_1 = \frac{\mu^2 a}{\alpha} \cos \lambda, \quad m_2 = \frac{\alpha}{a \cos \lambda}.$$

Se la proiezione è equivalente si ha $\mu^2 = 1$; e se le distanze debbono essere conservate sull'almicantarate massimo, ossia sulla circonferenza C , è $\alpha = a$; il che semplifica le precedenti formole (1).

§ 24. Sia $l' = 0^\circ$. La circonferenza C , sulla quale si contano le τ , confondesi col meridiano iniziale, il polo di questo e l'origine delle τ sono

(1) Il TEXTOR, nella *Monatliche Correspondenz* dello ZACH fasc. del settembre 1808, p. 185, ha cercato, sotto altro punto di vista, di rappresentare equivalentemente una zona terrestre che non sia parallela all'equatore.

sull'equatore, e la proiezione assume un aspetto molto particolare. Alla proiezione cilindrica generata dallo sviluppo del cilindro circoscritto secondo l'equatore o penetrante secondo un parallelo, della quale ogni ordinaria proiezione cilindrica può ritenersi come una modificazione, risponde la proiezione originata dallo sviluppo del cilindro circoscritto al meridiano iniziale od inscritto secondo un circolo che gli sia parallelo. Questa nuova proiezione è come un'inversione della prima perchè l'equatore ed il meridiano iniziale fanno le veci l'uno dell'altro, e noi la diciamo proiezione cilindrica inversa. La quale seguita ad essere governata dalle equazioni (25).

Le formole (27) e (28) che danno le coordinate λ e τ in funzione delle geografiche l e t e reciprocamente si riducono a

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \lambda &= \cos l \operatorname{sen} t, \\ \tan \tau &= \frac{\tan l}{\cos t},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} l &= \cos \lambda \operatorname{sen} \tau, \\ \tan t &= \frac{\tan \lambda}{\cos \tau}.\end{aligned}$$

Dall'asse delle X è rappresentato il meridiano iniziale; secondo rette che gli sono parallele si proiettano i suoi due poli. Si hanno infinite rappresentazioni dei due poli geografici in punti posti sull'asse delle X e distanti dall'origine di

$$X = (4n + 1) \frac{\pi \alpha}{2},$$

ovvero di

$$X = (4n - 1) \frac{\pi \alpha}{2},$$

secondo che si tratta del polo positivo o del negativo ed essendo n un numero intiero. Le rette somministrate da

$$X = n \pi \alpha$$

sono altrettante rappresentazioni dell'equatore e quelle date da

$$X = (4n \pm 1) \frac{\pi \alpha}{2}$$

sono le proiezioni dei meridiani distanti di 90° dal meridiano iniziale.

Nel costruire la rete de' meridiani e paralleli basterà occuparsi della ottava parte della sfera compresa fra l'equatore, il polo positivo ed i meridiani di 0° e 90° ; le altre ottave parti non ne sono altro che semplici riproduzioni. Ma havvi di più. La mappa della sfera, a cagione della

periodicità dei valori di X , si riproduce indefinitamente nello spazio compreso fra le due rette secondo cui si proiettano i due poli del meridiano iniziale. Ciò può essere di molto vantaggio per togliere la discontinuità nel senso longitudinale del detto spazio bastando proseguire la rappresentazione oltre i limiti superiore ed inferiore della mappa.

Le proiezioni cilindriche inverse sono utili per le carte di regioni molto estese in latitudine, poco in longitudine. Tornano, ad esempio, proficue per l'America. Meglio è assumere come meridiano iniziale il meridiano medio della regione. Vedesi altresì come per la rappresentazione dei fusi sferici terminati da due semimeridiani nulla si possa immaginare di meglio della proiezione cilindrica inversa.

Trattandosi di costruire il mappamondo può essere vantaggioso, a cagione delle grandi alterazioni che avvengono collo scostarsi dal meridiano centrale, ricorrere al mappamondo misto, in cui sieno usate la proiezione cilindrica inversa per una certa zona divisa per mezzo dal meridiano centrale e la proiezione azzimutale per le due rimanenti zone ad una sola base aventi i vertici nei poli del detto meridiano.

Come nelle ordinarie proiezioni cilindriche primeggiano le equidistanti, le isogoniche, le quantitative ed equivalenti, così nelle cilindriche inverse si hanno le stesse omonime rappresentazioni, delle quali ho altrove discorso (1). Qui ricordo solo le formole principali che riguardano le quantitative ed equivalenti. Le quali sono rette dalle equazioni (29) Chi voglia le coordinate rettangolari del punto generale della rappresentazione in funzione delle coordinate geografiche, ricava dalle (30)

$$\tan \frac{X}{\alpha} = \frac{\tan l}{\cos t}, \quad Y = \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} \sin t \cos l.$$

Dalla (31) si ha l'equazione del parallelo di latitudine l

$$(\mu^4 a^4 - \alpha^2 Y^2) \sin^2 \frac{X}{\alpha} = \mu^4 a^4 \sin^2 l,$$

dalla (32) l'equazione del meridiano di longitudine t

$$(\mu^4 a^4 - \alpha^2 Y^2) \cos^2 \frac{X}{\alpha} = \alpha^2 Y^2 \cot^2 l.$$

Facendo $\mu^2 = 1$ e $\alpha = a$, la proiezione riesce equivalente e le distanze risultano conservate sul meridiano iniziale. Questa questione è trattata distesamente nel citato libro, e qui mi arresto (2).

(1) *Le proiezioni*, ecc. Cap. V, Art. III.

(2) Op. cit. Cap. V, § 23. — Primo ad immaginare e studiare le proiezioni cilindriche inverse fu il LAMBERT (op. cit. Tom. III).

§ 25. Si è contemplato al § 21 il caso dei meridiani rettilinei e paralleli; ora consideriamo l'altro, più generale, in cui sono rettilinei senza essere paralleli. Si assuma per asse delle X il meridiano che è perpendicolare ai paralleli e dal quale intendiamo avere inizio le longitudini. Sarà nulla, nella (23), la $\phi(l)$, nulla, nella (24), la $\theta(X)$, e l'equazione dei meridiani, dette c e β due costanti, risulterà

$$Y = \mu^2 t (c + \beta X)$$

Nel caso particolare di $\beta = 0$ si ha

$$Y = \mu^2 c t,$$

e ponendo all'equatore l'origine delle coordinate,

$$X = \frac{1}{c} \int_0^l r, r^2 dl$$

le quali due equazioni spettano (§ 21) alla proiezione cilindrica quantitativa e s'identificano, fatto $\mu^2 c = \alpha$, con quelle ivi riferite.

Ponendo, astrazione fatta dal caso di $\beta = 0$, l'origine delle coordinate nel punto dell'asse delle X pel quale passano tutti i meridiani e che coincide col polo, la equazione del meridiano di longitudine t diviene

$$Y = \mu^2 \beta t X.$$

Per ciò, introducendo la colatitudine u , sarà

$$r_1 r_2 du = \beta X dX,$$

da cui si ha

$$X^2 = \frac{2}{\beta} \int_0^u r_1 r_2 du,$$

e quindi

$$X = \sqrt{\frac{2}{\beta} \int_0^u r_1 r_2 du}$$

$$Y = \mu^2 t \sqrt{2 \beta \int_0^u r_1 r_2 du}.$$

Tali sono le equazioni che reggono la proiezione in discorso.

Svolgendo in serie, limitandoci ai termini di 2° ordine e dicendo b il semiasse polare dello sferoide si trova

$$X = \sqrt{\frac{2b}{\beta}} \left\{ \frac{u}{2} + \frac{e^2}{3} (1 + \cos u + \cos^3 u) \right\},$$

$$Y = 2 \mu^2 b t \sqrt{\frac{\beta}{2}} \left\{ \frac{u}{2} + \frac{e^2}{3} (1 + \cos u + \cos^3 u) \right\}.$$

periodicità dei valori di X , si riproduce indefinitamente nello spazio compreso fra le due rette secondo cui si proiettano i due poli del meridiano iniziale. Ciò può essere di molto vantaggio per togliere la discontinuità nel senso longitudinale del detto spazio bastando proseguire la rappresentazione oltre i limiti superiore ed inferiore della mappa.

Le proiezioni cilindriche inverse sono utili per le carte di regioni molto estese in latitudine, poco in longitudine. Tornano, ad esempio, proficue per l'America. Meglio è assumere come meridiano iniziale il meridiano medio della regione. Vedesi altresì come per la rappresentazione dei fusi sferici terminati da due semimeridiani nulla si possa immaginare di meglio della proiezione cilindrica inversa.

Trattandosi di costruire il mappamondo può essere vantaggioso, a cagione delle grandi alterazioni che avvengono collo scostarsi dal meridiano centrale, ricorrere al mappamondo misto, in cui sieno usate la proiezione cilindrica inversa per una certa zona divisa per mezzo dal meridiano centrale e la proiezione azzimutale per le due rimanenti zone ad una sola base aventi i vertici nei poli del detto meridiano.

Come nelle ordinarie proiezioni cilindriche primeggiano le equidistanti, le isogoniche, le quantitative ed equivalenti, così nelle cilindriche inverse si hanno le stesse omonime rappresentazioni, delle quali ho altrove discorso (1). Qui ricordo solo le formole principali che riguardano le quantitative ed equivalenti. Le quali sono rette dalle equazioni (29) Chi voglia le coordinate rettangolari del punto generale della rappresentazione in funzione delle coordinate geografiche, ricava dalle (30)

$$\tan \frac{X}{\alpha} = \frac{\tan l}{\cos t}, \quad Y = \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} \sin t \cos l.$$

Dalla (31) si ha l'equazione del parallelo di latitudine l

$$(\mu^4 a^4 - \alpha^2 Y^2) \sin^2 \frac{X}{\alpha} = \mu^4 a^4 \sin^2 l,$$

dalla (32) l'equazione del meridiano di longitudine t

$$(\mu^4 a^4 - \alpha^2 Y^2) \cos^2 \frac{X}{\alpha} = \alpha^2 Y^2 \cot^2 l.$$

Facendo $\mu^2 = 1$ e $\alpha = a$, la proiezione riesce equivalente e le distanze risultano conservate sul meridiano iniziale. Questa questione è trattata distesamente nel citato libro, e qui mi arresto (2).

(1) *Le proiezioni*, ecc. Cap. V, Art. III.

(2) Op. cit. Cap. V, § 23. — Primo ad immaginare e studiare le proiezioni cilindriche inverse fu il LAMBERT (op. cit. Tom. III).

§ 25. Si è contemplato al § 21 il caso dei meridiani rettilinei e paralleli; ora consideriamo l'altro, più generale, in cui sono rettilinei senza essere paralleli. Si assuma per asse delle X il meridiano che è perpendicolare ai paralleli e dal quale intendiamo avere inizio le longitudini. Sarà nulla, nella (23), la $\phi(l)$, nulla, nella (24), la $\theta(X)$, e l'equazione dei meridiani, dette c e β due costanti, risulterà

$$Y = \mu^2 t (c + \beta X)$$

Nel caso particolare di $\beta = 0$ si ha

$$Y = \mu^2 c t,$$

e ponendo all'equatore l'origine delle coordinate,

$$X = \frac{1}{c} \int_0^l r, r^2 dl$$

le quali due equazioni spettano (§ 21) alla proiezione cilindrica quantitativa e s'identificano, fatto $\mu^2 c = \alpha$, con quelle ivi riferite.

Ponendo, astrazione fatta dal caso di $\beta = 0$, l'origine delle coordinate nel punto dell'asse delle X pel quale passano tutti i meridiani e che coincide col polo, la equazione del meridiano di longitudine t diviene

$$Y = \mu^2 \beta t X.$$

Per ciò, introducendo la colatitudine u , sarà

$$r_1 r_2 du = \beta X dX,$$

da cui si ha

$$X^2 = \frac{2}{\beta} \int_0^u r_1 r_2 du,$$

e quindi

$$X = \sqrt{\frac{2}{\beta} \int_0^u r_1 r_2 du}$$

$$Y = \mu^2 t \sqrt{2 \beta \int_0^u r_1 r_2 du}.$$

Tali sono le equazioni che reggono la proiezione in discorso.

Svolgendo in serie, limitandoci ai termini di 2° ordine e dicendo b il semiasse polare dello sferoide si trova

$$X = \sqrt{\frac{2b}{\beta}} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{3} (1 + \cos u + \cos^2 u) \right\},$$

$$Y = 2 \mu^2 b t \sqrt{\frac{b}{\beta}} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{3} (1 + \cos u + \cos^2 u) \right\}.$$

Questa proiezione porta il nome del COLLIGNON, il quale la propose nel 1865 (1).

Altro non ne diciamo avendone discorso estesamente altra volta (2).

§ 26. Vogliasi ora rinvenire una proiezione quantitativa che, rassomigliando, in certo qual modo, alla ortografica meridiana, abbia i semimeridiani segnati da semielissi. Le ricerche debbono versare sulla distribuzione dei paralleli, sul valore costante dell'asse polare delle semielissi meridiane, sul modo di variare dell'altro asse.

Posta l'origine delle coordinate nell'incontro dell'equatore col primo meridiano, ambi rappresentati da linee rette, il meridiano di longitudine t , in virtù della (24), dov'è nulla la $\theta(X)$, ha per equazione

$$(33) \quad Y = \frac{\mu^2 B t}{A} \sqrt{A^2 - X^2},$$

in cui, A e B essendo quantità lineari costanti, A è il semiasse polare e $\mu^2 B t$ l'equatoriale. Deve, dunque, essere

$$\frac{B}{A} \sqrt{A^2 - X^2} dX = r_1 r_2 dl,$$

che, per via d'integrazione, dà

$$(34) \quad AB \arcsin \left(\frac{X}{A} \right) + BX \sqrt{1 - \frac{X^2}{A^2}} = 2 \int_0^l r_1 r_2 dl$$

Facendo, in questa, $l = \frac{\pi}{2}$ e dicendo $2E$ la superficie dell'elissoide, si ha

$$(35) \quad AB = \frac{2E}{\pi^2}$$

che è la relazione che lega fra loro le costanti A e B .

La proiezione è retta, ponendo mente alla (35), dalle (33) e (34). La stessa porta il nome del MOLLWEID che ne fu l'inventore (3). Altro non ne diciamo avendone altrove trattato distesamente e detto in particolare del modo di calcolare le coordinate X e Y del punto della rappresentazione di cui sono note le coordinate geografiche, della determinazione dei semiasse delle elissi meridiane, della costruzione de' meridiani e paralleli e della divulgazione di siffatta proiezione (4).

(1) *Recherches sur la représentation plane de la surface du globe terrestre* nel *Journal de l'École polytechnique*. Tom. XXIV, Parigi, 1885, p. 145.

(2) *Le proiezioni*, ecc. Cap. VI, § 10.

(3) *Monatliche Correspondenz* di ZACH, agosto, 1805.

(4) *Le proiezioni*, ecc., Cap. VI, § 11. — La delineazione della tavola LXX dell'annesso atlante fu dal disegnatore sbagliata; si sa che gl'intervalli dei paralleli decrescono dall'equatore al polo, nella tavola invece vanno crescendo. Ringrazio l'HERZ che (op. cit. p. 165) ha avvertito tale errore.

§ 27. Nella stereografia meridiana della sfera i paralleli sono archi circolari che incrotrano il primo meridiano in punti distanti dall'equatore di quantità proporzionali a $\tan \frac{l}{2}$. Ora domandasi di formolare la proiezione quantitativa di modulo μ^2 in guisa che i paralleli, non più circolari, ma rettilinei, seguitino a tagliare, secondo la nominata legge, l'asse delle X che rappresenta ancora il meridiano iniziale.

Dicendo K un coefficiente costante si ha

$$X = K \tan \frac{l}{2},$$

e quindi

$$Y = \frac{2 \mu^2 a^2 t}{K} \cos l \cos^2 \frac{l}{2}.$$

Tali sono le equazioni che reggono siffatta proiezione. La quale, nel caso della conservazione delle aree, fu proposta dal DE PRÉPETIT-FOUCAUT sotto il nome sistema stereografico equivalente (1), e che fu ampiamente da noi altrove esposta (2).

§ 28. Può richiedersi che le distanze dei paralleli dall'equatore sieno proporzionali ai loro intervalli sulla superficie obbiettiva. Con ciò viene ad essere data la (22), e se ne deve dedurre la (23).

Posta l'origine all'equatore e detto α un coefficiente costante, si ha

$$X = \alpha \int_0^l r_1 dl,$$

e

$$Y = \frac{\mu^2 r_2 t}{\alpha} + \phi(l).$$

Riferendosi alle formole del § 20 si trovano le

$$\tan \delta = \frac{dY}{\alpha r_1 dl}, \quad m' = \frac{\alpha}{\cos \delta}, \quad m'' = \frac{\mu^2}{\alpha},$$

delle quali l'ultima significa che i gradi di longitudine, indipendentemente dalla latitudine, sono dovunque amplificati secondo il rapporto co-

stante $\frac{\mu^2}{\alpha}$.

Se il meridiano iniziale è rettilineo in proiezione, si ha $\phi(l) = 0$ ed è

$$\tan \delta = - \frac{\mu^2 t \sin l}{\alpha^2},$$

(1) Vedi la Memoria litografata ad Arras nel 1862 ed intitolata: *Notice sur la construction de nouvelles mappemondes et de nouveaux atlas de géographie*, App. d'AVEZAC; op. cit. p. 92.

(2) Op. cit.; Cap. VI.

che mostra come i meridiani incontrino l'equatore ad angolo retto ed il meridiano iniziale sotto l'angolo che ha per tangente $\frac{\mu^2 t}{\alpha^2}$.

A costruire il mappamondo, segnate le due rette ortogonali che danno le direzioni del meridiano iniziale e dell'equatore ed il cui incontro è l'origine delle latitudini e delle longitudini, portati, inferiormente e superiormente, sulla prima i gradi di latitudine moltiplicati per α , si osservi che i paralleli sono le rette tirate, per gli ottenuti punti, parallelamente all'equatore, e che, se sui medesimi, a partire dal meridiano iniziale, si portano i rispondenti gradi di longitudine moltiplicati per $\frac{\mu^2}{\alpha}$, i meridiani sono le linee congiungenti gli omonimi punti di divisione. Il mappamondo può costruirsi in un solo pezzo od in due secondo che la longitudine si fa variare da 0° a $\pm 180^\circ$, ovvero da 0° a $\pm 90^\circ$; gli si possono pure dare altre disposizioni.

Se nella proiezione studiata al § 7 s'intende portato a distanza infinita il comun centro de' paralleli si ritrova l'attuale rappresentazione; questa, dunque, è di quella un caso particolare.

§ 29. Le formole ora trovate si semplificano quando, oltre all'essere $\varphi(l) = 0$, sia $\mu^2 = 1$ e $\alpha = 1$, con che la proiezione è equivalente e le distanze sono conservate sul meridiano iniziale steso in linea retta. Allora si ha

$$X = \int_0^l r_1 dl, \quad Y = r_2 t$$

$$\tan \delta = -t \tan l, \quad m' = \frac{r_1}{\cos \delta}, \quad m'' = r_2.$$

I gradi di longitudine sono conservati sui singoli paralleli e non soffrono alcun nocumento nella rappresentazione. Le formole valevoli a trovare i moduli principali, le direzioni loro competenti e l'errore dell'angolo più sformato sono quelle stesse indicate al § 8. Come pure qui vale tutto ciò che là s'è detto intorno alle curve isoperimetre. E però l'equazione della curva che, a somiglianza del parallelo, ha la proprietà di mantenere inalterate nella rappresentazione le lunghezze degli archi obbiettivi è

$$\frac{dt}{t} = -\frac{r_1 \sin l}{2 r_2} dl.$$

I meridiani, sulla carta, si spiccano dal polo facendo col meridiano iniziale un angolo la cui tangente uguaglia la longitudine.

Le alterazioni angolari, nulle all'equatore e sul meridiano iniziale, crescono, al pari delle lineari, col crescere di l e t . E per ciò l'attuale pro-

jezione non è guari propria alla rappresentazione delle regioni estendentisi soverchiamente in latitudine ed in longitudine. Chi volesse, ad onta della sua poca proprietà, applicarla alla composizione del mappamondo, troverebbe questo racchiuso in un'ovale avente l'un diametro quasi doppio dell'altro, e propriamente l'uno doppio dell'altro nel caso della sfera, poichè il diametro equatoriale vale $2\pi a$ ed il polare eguaglia il semimeridiano. Non si ha tuttavia un'ovale nel vero significato di tale voce sendo che la curva periferica è bensì normale all'asse equatoriale, ma incontra il polare sotto un angolo la cui tangente uguaglia π .

Il mappamondo potrebbesi anche fare in due pezzi, ciascuno dei quali rappresenti l'emisfero meridiano; con che si evitano le soverchie alterazioni che si manifestano al di là dei 90° di longitudine quando lo stesso è in un pezzo unico. La delineazione de' meridiani e paralleli sta come al § precedente, ma è resa più facile da ciò che, le distanze essendo conservate sul meridiano iniziale e sui paralleli, bisogna portare nella loro vera lunghezza, sopra questi i gradi di longitudine, sopra quello i gradi di latitudine.

La presente proiezione è un caso particolare di quella esposta al § 4, dove siasi portato a distanza infinita il comun centro de' paralleli, oppure dell'altra studiata al § 11 in cui le alterazioni lineari ed angolari debbono esser nulle all'equatore.

Nel caso della sfera le equazioni che governano la proiezione riduconsi a

$$X = at, \quad Y = at \cos l$$

Quanto alle formole che riguardano le alterazioni lineari ed angolari nulla havvi da mutare; sono le medesime sì per lo sferoide che per la sfera.

Il meridiano si proietta secondo la curva

$$Y = at \cos \frac{X}{a},$$

la quale altro non è che la curva dei seni, detta anche sinussoide. E però la proiezione fu detta sinussoidale (1), e tale l'appelliamo anche quando la si applichi allo sferoide.

L'equazione della curva isoperimetra risulta

$$\frac{2}{t} \frac{dt}{dl} = -\tan l \, dl,$$

da cui, integrando e dicendo A una costante, si trae

$$t^2 = A \cos l,$$

(1) Così il D'AVEZAC nell'op. cit.

ed in coordinate rettangolari

$$Y^2 = A a^2 \cos^3 \frac{X}{a}.$$

Se la curva deve passare pel punto (l', t') si ha

$$\frac{t'^2}{l'^2} = \frac{\cos l'}{\cos l'},$$

e

$$\frac{Y^2}{Y'^2} = \frac{\cos^3 \frac{X}{a}}{\cos^3 \frac{X'}{a}}.$$

Un primo esempio di proiezione sinusoidale si ha nella carta della America meridionale che fa parte dell'Atlante di GERARDO MERCATORE e JUDOCO ONDIO (1). L'ispezione e le misure della tavola mostrano che sono conservati i gradi latitudinali sul meridiano medio steso in linea retta ed i longitudinali sui paralleli segnati da rette parallele fra loro ed all'equatore, il quale è incontrato normalmente dai meridiani. Ciò è anche meglio significato dalle iscrizioni della tavola: *Medius meridianus est 320; reliqui ad hunc incurvantur ratione sphaerica*. La carta non ha il nome dell'autore. Ma è probabile che l'inventore di tale proiezione sia GERARDO MERCATORE, il quale aveva già modificato (§ 10) quella di TOLOMEO in guisa da conservare, come ha fatto in questa, i gradi di longitudine sui singoli paralleli. La quale probabilità è accresciuta da ciò che JUDOCO ed ENRICO ONDIO altro non fecero che aggiungere alcune carte all'atlante del MERCATORE che può ritenersi come l'inventore della proiezione sinusoidale (2).

L'esempio fu continuato, alcuni anni dopo da NICOLA SANSON che cominciò le sue pubblicazioni nel 1627 (3), ed i cui processi furono seguiti da' suoi figliuoli NICOLA, ADRIANO e GUGLIELMO, dai nipoti e pronipoti fra i quali fu rinomato ROBERTO DI VAUGONDY. Il metodo sinusoidale del SANSON andò sempre perfezionandosi. Il padre ed il figlio NICOLA diedero alla luce nel 1652 e nel 1656 le quattro parti del mondo, l'Europa

(1) *Gerardi Mercatoris Atlas*.... Amsterdam, 1623.

(2) Ciò noi affermavamo a p. 506 del libro: *Le proiezioni*, ecc., senza conoscere l'opuscolo del BREUSING: *Gerard Kremer gen. Mercator*, 2^a ed., Duisburgo 1878, dove, a pag. 48, si attribuisce a GERARDO MERCATORE la rete della carta dell'America meridionale e quindi l'invenzione della proiezione sinusoidale. Vedi anche l'altro opuscolo dello stesso autore: *Leitfaden durch das Wiegenalter der Kartographie zum Jahre 1600 von Dr. A. Breusing*. Frankfurt, A. M. 1883, p. 26.

(3) Del SANSON, n. 1600, m. 1667, discorre il D'AYEZAC nell'op. cit., p. 80, il quale lo erede inventore della proiezione sinusoidale. Di lui, de' suoi figliuoli, nipoti e pronipoti che seguitarono a coltivare la cartografia, scrisse il LELEWEL nella *Géographie du moyen-âge*, Tom. II.

in 12 carte, l'Asia in 16, l'Africa in 18, l'America in 12; le une sono del padre, le altre del figlio (1). Separatamente furono stampate quelle quattro parti, di cui in seguito si fecero altre edizioni. Nel 1693 venne fuori un atlante che tutte le riuniva (2) e nel 1700 una nuova edizione ne comparve in Amsterdam (3).

Un altro cartografo francese GUGLIELMO DE L' ISLE (4), si rivolse, fra le varie proiezioni di cui fece uso, anche alla sinussoidale che applicò alla carta dell'America meridionale e ad altre carte di quel continente. Le quali hanno la data dei primi anni del secolo passato.

La proiezione sinussoidale fu molto in onore presso gl'inglesi. Ne insegnava le regole un trattato di cartografia pubblicato a Londra nel 1712 (5).

L'astronomo FLAMSTEED l'applicava alle carte di un grande atlante celeste, venuto fuori dieci anni dopo la sua morte (6). All'autore gli editori attribuirono l'invenzione della proiezione adoperata; ciò fu talmente creduto che anche oggidì questa porta il nome dell'astronomo inglese con iscapito non piccolo della storia della cartografia. Ed in grazia di tale errore, alla proiezione del BONNE, la quale, in certo qual modo, è costruita colle regole della sinussoidale cambiando i paralleli rettilinei in circolari, fu dato il nome di proiezione del FLAMSTEED modificata.

Non pochi amatori della cartografia riprodussero, come nuova, la proiezione sinussoidale. Non è caso di plagio. Tale fatto devesi attribuire alla facilità con cui siffatta proiezione si presenta alla mente di chi, ignaro dei vari processi usati nella cartografia, va in cerca di metodi novelli per la rappresentazione in piano della superficie terrestre. Così vediamo nel 1865 il dott. MOER proporla quale nuova rappresentazione col nome di isografica (7) e nel 1867 il sig. DREZE DE DISON presentare all'Accademia delle Scienze del Belgio un nuovo sistema di costruzione delle carte geografiche, il quale non è altro che il metodo sinussoidale (8).

La proiezione sinussoidale è eminentemente utile per le carte delle regioni attraversate dall'equatore o che gli sono prossime; è per ciò che fu molto praticata in passato dai varî cartografi. Anche in questo se-

(1) Le carte dovute al SANSON padre portano l'iscrizione: *par le S.r Sanson d'Abbeville, géographe du Roy*; quelle dovute al figlio hanno: *par N. Sanson le fils, géographe du Roy*.

(2) *Atlas nouveaux contenant toutes les parties du monde par le S.r Sanson géographe du Roy, présenté a Mons. le Dauphin par Juillot*. Paris, 1693.

(3) *Description de tout l'Univers par Sanson père et fils, nouvelle édition*. Amsterdam, 1700.

(4) GUGLIELMO DE L'ISLE n. 1675, m. 1776.

(5) *Construction of Maps and Globes*. Londra, 1717, Cap. XIII.

(6) *Atlas caelestis by the late Reverend Flamsteed, regius professor of astronomy*. Londra, 1729.

(7) Seduta del 6 febbrajo 1865 della Società di Storia naturale e di medicina del Basso Reno.

(8) Vedi il Rapporto del CATALAN sopra un nuovo sistema di carte geografiche nel *Bulletin de l'Ac. des sciences du Belgique*, 1867.

colo il suo impiego non venne mai meno negli atlanti, come, ad esempio, in quelli del LAPIE, del GARNIER, dello STIELER (1). Dei quali atlanti ci limitiamo a menzionare solo alcune carte; nel primo e nel secondo quelle dell'Africa e dell'America meridionale, nel terzo varie carte dell'Africa, due della Polinesia ed una dell'America.

§ 30. Un'importante applicazione della proiezione sinussoidale equivalente si ha nei fogli della carta d'Italia alla scala di 1 : 100,000 che si sta eseguendo dall'Istituto geografico militare Ciaschedun foglio risponde ad un quadrangolo dello sferoide terrestre limitato da due archi di parallelo e da due archi di meridiano, ampli questi per 20' di latitudine, quelli per 30' di longitudine. Il meridiano centrale ed il parallelo medio del quadrilatero sferoidico sono, sulla carta, disposti secondo due rette fra loro normali. Alle quali, come ad assi rettangolari, si riferiscono i vari punti del foglio, le cui coordinate sono gli sviluppi degli archi obbiettivi di meridiano e di parallelo che dagli stessi punti vanno al parallelo medio ed al meridiano centrale. Tale proiezione, che il nominato Istituto applica ad ogni singolo foglio della Carta d'Italia, fu denominata naturale; potrebbe anche dirsi policentrica sendo che i centri di proiezione sono tanti quanti i fogli della carta (2).

Ponendo l'origine delle coordinate nell'incontro del parallelo medio di latitudine l' col meridiano centrale, inizio, per ciaschedun foglio, delle longitudini, assumendo questo come asse delle X , quello come asse delle Y , le coordinate del punto di latitudine l e longitudine t sono

$$X = \int_r^l r_1 dl, \quad Y = r_2 t,$$

le quali avvertendo alle formole del paragrafo precedente, ed osservando come l'origine delle coordinate sia, non più all'equatore, ma al centro di ciascun foglio, a cui si riferiscono il parallelo medio ed il meridiano centrale, mostrano che la proiezione dei fogli della carta d'Italia è una vera proiezione equivalente sinussoidale (3).

Tracciato, pel centro del foglio, il meridiano centrale che è l'arco obbiettivo rettificato, condotti pei suoi estremi ed in modo simmetrico due rette perpendicolari uguali alle rettificazioni dei margini superiore ed infe-

(1) I detti atlanti sono citati al § 11.

(2) *Istruzioni sulla proiezione naturale applicata alla formazione della carta d'Italia e collocamento dei punti geodetici nei fogli*, 2ª ed. Firenze, 1879. — *Sul sistema di proiezione più conveniente per le carte topografiche d'Italia* nella *Rivista militare italiana*, serie III, anno XVIII, Tom. II, p. 5. — *Teoria della trasformazione della superficie con applicazione allo studio delle deformazioni nelle proiezioni cartografiche* per L. Giletta, estratto dalla *Rivista militare italiana*, anno 1880, p. 52.

(3) Nelle menzionate *Istruzioni* sono alcune tavole che offrono gli sviluppi dei vari archi di meridiano e di parallelo compresi nei fogli della carta d'Italia e che facilitano la ricerca delle coordinate X e Y dei punti di ciaschedun foglio, noti per mezzo delle loro coordinate geografiche.

riore del quadrilatero obbiettivo, alle curve dei meridiani che limitano ciascheduno foglio e che sono sinussoidi (1) si sostituiscono, nella così detta proiezione naturale due linee rette congiungenti i punti estremi di quelle che rappresentano il parallelo superiore e l'inferiore. Per tale modo, osservando che il raggio del parallelo uguaglia la normale moltiplicata pel coseno della latitudine e dicendo N' , N_1 e N_2 le normali alle latitudini λ' , λ_1 e λ_2 dei paralleli medio, superiore ed inferiore, il semiparallelo medio della carta, pari a $\frac{\pi}{720} N' \cos \lambda'$ è surrogato da $\frac{\pi}{1440} (N_1 \cos \lambda_1 + N_2 \cos \lambda_2)$.

I quali valori differiscono tra loro di una quantità così esigua (e ciò potrebbe facilmente chiarire con qualche esempio) che è impossibile tenerne conto sulla carta, non solo quando la scala è di 1:100,000, ma anche quando si adopera una scala maggiore, quella di 1:25,000. Ed è pure manifesto che, dividendo i due margini del foglio, il superiore e l'inferiore, in 30 parti uguali, ossia nei loro minuti primi, le rette congiungenti gli omonimi punti di divisione rappresentano i rispondenti meridiani.

Le espressioni di X e Y offrono il destro di collocare sulla carta i punti trigonometrici di 1° e 2° ordine, dei quali sono sempre note le coordinate geografiche l e t , somministrate dall'osservazione o dal calcolo. È pure facile il collocamento sulla carta dei punti trigonometrici di ordine inferiore, imperocchè, essendo questi appoggiati a due o più punti di ordine superiore, se ne traggono, coi noti metodi, le distanze dalla meridiana di uno di questi e dalla sua perpendicolare e quindi, mediante una semplice addizione o sottrazione, le distanze X e Y dal parallelo medio e dal meridiano centrale. La quale cosa, avuto riguardo alla ristrettezza del terreno rispondente al foglio, si può ritenere come esatta. Per tale considerazione è altresì permesso di mettere a posto i detti punti trigonometrici di ordine inferiore senza ricorrere alle loro coordinate poichè trattasi semplicemente di riportare sulla carta certe figure piane simili, quali sono quelle determinate dai punti di ordine inferiore legati per mezzo di triangoli a quelli di ordine superiore. Ed è appunto la considerazione del riporto sul foglio di figure piane simili a quelle del terreno che indusse l'Istituto geografico militare a servirsi dei fogli sui quali sono segnati i punti trigonometrici come di altrettanti fogli della tavoletta pretoriana per rilevare i particolari del rispondente terreno. Senonchè, come ora si dirà, i fogli che servono al rilevamento topografico non sono quelli alla scala di 1:100,000, ma altri che ne sono certe frazioni e di scala maggiore.

Le levate del terreno che il nominato Istituto compie per mezzo della

(1) Tali curve sono vere sinussoidi nel caso della sfera; vi si avvicinano moltissimo trattandosi dell'ellissoide terrestre.

tavoletta pretoriana alle scale di 1:50,000 e di 1:25,000 sono considerate come suddivisioni del foglio alla scala di 1:100,000. Dall'essere questo di dimensioni per poco inferiori a quelle di una tavoletta da campagna risulta che la sua ampiezza risponde bene alla levata topografica di 1/4 ovvero di 1/10 di foglio secondo la scala è di 1:50,000, ovvero di 1:25,000.

Si suole chiamare quadrante il quarto di foglio che ordinariamente rappresenta la levata topografica alla scala di 1:50,000 e si dà il nome di tavoletta al sedicesimo di foglio che rappresenta la levata topografica alla scala di 1:25,000.

I quattro quadranti di un foglio sono denominati dai numeri I, II, III e IV, e sono i quadranti N.-E., S.-E., S.-O. e N.-O., i cui archi di parallelo estremi hanno 15' di longitudine e distano di 10' in latitudine. E le quattro tavolette di ciascun quadrante, ad indicarne la regione della loro postura, sono designate colle lettere NE, SE, SO e NO; ciascuna è limitata da due archi di parallelo di 7' 30" e da due archi di meridiano di 5'.

Il foglio alla scala di 1:100,000, il quadrante e la tavoletta alle scale di 1:50,000 e di 1:25,000 hanno su per giù la stessa grandezza. La quale cosa è anche meglio chiarita da qualche esempio. Considerando il foglio le cui latitudini estreme sono 42°, 20' e 42°, 00', il suo quadrante II e la tavoletta NO di questo quadrante, si trova che i terreni rappresentati sulle tre carte hanno, in chilometri quadrati, la superficie 1505,3758, 376,8501 e 94,1494, di cui ciascuna è approssimativamente la quarta parte della precedente. E, quando si abbia riguardo alle scale delle tre carte, si può dire, senza errore sensibile, che queste hanno le stesse dimensioni (1).

I fogli soggetti alle maggiori deformazioni, a norma di quanto si disse nel § precedente, sono quelli di più alta latitudine. Se, considerando uno dei fogli più settentrionali della carta d'Italia, quello segnato col numero 12, il cui centro è alla latitudine di 46°, 30' ed in cui havvi il luogo rimarcabile di Auronzo, si calcolano le principali alterazioni lineari ed angolari per l'estremità N.-E. del foglio, si trova che, posta l'origine delle longitudini al meridiano centrale del foglio, è

$$l = 46^\circ. 40', t = 15',$$

(1) Vedi le citate *Istruzioni* e la pubblicazione dell'Istituto geografico militare italiano intitolata: *Superficie del Regno d'Italia valutata nel 1884* Firenze 1885. p. 5, 6 19.

Le longitudini, per la carta d'Italia, hanno origine dal meridiano che passa per l'Osservatorio della Villa Barberini sul Monte Mario presso Roma. Il quale Osservatorio fu bensì demolito nel costruire le recenti fortificazioni; ma si è conservata, col mezzo di un segnale, la precisa traccia dell'antico centro trigonometrico.

e quindi

$$\begin{aligned}\delta &= 10', 55'' & \varepsilon &= 5', 27'' \\ m' &= 1, 00001 & m_1 &= 1, 00159 \\ m'' &= 1, 00000 & m_2 &= 0, 99841\end{aligned}$$

§ 31. La seconda delle due equazioni generali (22) e (23) poste al § 20 essendo una funzione lineare della longitudine t , si considerino le proiezioni per le quali è costante il coefficiente della t .

Detto α cotesto coefficiente, si ha

$$Y = \alpha t + \phi(l),$$

e quindi, prendendo l'equatore come asse delle Y ,

$$X = \frac{\mu^2}{\alpha} \int_0^l r_1 r_2 dl$$

Le quali equazioni significano che la distribuzione dei paralleli è regolata come nella proiezione cilindrica quantitativa e che i meridiani sono tutti uguali fra loro, poichè basta trasportare nel senso delle Y un dato meridiano di longitudine t' della quantità $\alpha(t - t')$ per avere il meridiano di longitudine t .

Le formole del citato § 20 danno

$$\tan \delta = \frac{\alpha}{\mu^2 r_1 r_2} \frac{d\phi(l)}{dl}, \quad m' = \frac{\mu^2 r_2}{\alpha \cos \delta}, \quad m'' = \frac{\alpha}{r_2},$$

da cui traesi che il modulo lineare nella direzione dei paralleli è lo stesso come nelle proiezioni cilindriche, che a determinare il coefficiente α è molto propria la condizione dell'inalterabilità delle distanze sopra un dato parallelo. Quando queste debbano essere conservate sull'equatore si trova $\alpha = \alpha$.

Se un dato meridiano dev'essere rettilineo, basta contare dal medesimo le longitudini per ritrovare le equazioni della proiezione cilindrica quantitativa.

§ 32. A determinare la $\phi(l)$, nel caso della sfera, valga la condizione che il semimeridiano di longitudine t' sia una semicirconferenza divisa ne' suoi gradi latitudinali.

L'equazione dei paralleli essendo

$$X = \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} \sin l,$$

la distanza del polo dall'equatore, facendo $l = 90^\circ$, risulta pari a $\frac{\mu^2 a^2}{\alpha}$, che esprime il raggio della semicirconferenza. E se dicesi A la distanza

dall'origine al centro del semicircolo rappresentativo del semimeridiano di longitudine t' , l'ordinata di un suo punto di latitudine l essendo $A + \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} \cos l$, si ha

$$A + \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} \cos l = \alpha t' + \phi(l),$$

da cui si ricava la $\phi(l)$. Sarà dunque

$$Y = \alpha(t - t') + \frac{\mu^2 a^2}{\alpha} \cos l + A,$$

l'equazione del meridiano di longitudine t risulterà

$$(Y - \alpha t + \alpha t' - A)^2 + X^2 = \frac{\mu^4 a^4}{\alpha^2},$$

ed avrassi

$$\tan \delta = -\tan l,$$

ossia

$$\delta = -l,$$

$$m' = \frac{\mu^2 a}{\alpha}, \quad m'' = \frac{\alpha}{a \cos l}.$$

L'espressione di m' mostra che gli archi dei meridiani sono dovunque amplificati secondo il rapporto costante $\frac{\mu^2 a}{\alpha}$.

Chi ami le distanze conservate sull'equatore e ponga l'origine delle coordinate nel centro del semimeridiano t' , faccia cioè $\alpha = a$ e $A = 0$, trova

$$X = \mu^2 a \sin l, \quad Y = a(t - t') + \mu^2 a \cos l, \\ \delta = -l, \quad m' = \mu^2, \quad m'' = \frac{1}{\cos l}.$$

§ 33. Se, conservando le distanze sull'equatore, si rende equivalente la proiezione e si pone l'origine delle coordinate nel centro del semimeridiano iniziale si ha

$$X = a \sin l, \quad Y = at + a \cos l, \\ \delta = -l, \quad m' = 1, \quad m'' = \frac{1}{\cos l}.$$

I moduli principali, che (§ 1) sono

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} = \mp \frac{1}{2} \tan l + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 l},$$

spettano alle direzioni azzimuttali obbiettive e subbiettive, date da

$$\tan 2 \omega = \frac{2}{\tan l},$$

$$\tan 2 \Omega = \frac{-2}{\tan l},$$

potendosi anche calcolare l'azzimutto obbiettivo ω ed il subbiettivo Ω della direzione principale m_1 colle formole del § 16. Il semierrore ε dell'angolo più sformato si ha da

$$\tan \varepsilon = -\frac{l}{2} \tan l,$$

e quindi pei moduli principali trovasi

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} = \tan \left(45^\circ \pm \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Quanto alle curve isoperimetre, le cui tangenti sono le direzioni di massima deviazione dalle direzioni principali e formano l'angolo soggetto alla massima alterazione, valgono le formole del § 16. L'una delle quali curve coincidendo col meridiano, si trova, per l'altra, l'equazione

$$dt = \frac{2 dl}{\sin l},$$

da cui, integrando e dicendo K un coefficiente costante, si ha

$$t = 2 \log \left(K \tan \frac{l}{2} \right),$$

che, indicando con l e l' le coordinate geografiche di un dato punto per cui deve passare la curva, si cambia in

$$t - t' = 2 \log \frac{\tan \frac{l}{2}}{\tan \frac{l'}{2}}.$$

Le quali due equazioni, introducendo le coordinate rettangolari, divengono

$$Y = \sqrt{a^2 - X^2} + 2a \log \frac{KX}{a + \sqrt{a^2 - X^2}},$$

e

$$Y - Y' = \sqrt{a^2 - X^2} - \sqrt{a^2 - X'^2} + 2a \log \frac{X(a + \sqrt{a^2 - X^2})}{X'(a + \sqrt{a^2 - X'^2})}.$$

Le distanze, per essere $m' = 1$, sono conservate sui meridiani, i quali, in proiezione, sono la genuina riproduzione dei semimeridiani obbiettivi, hanno per equazione

$$(Y - at)^2 + X^2 = a^2,$$

e, spettando all'equatore il modulo m'' uguale all'unità, intersecano sul medesimo porzioni uguali agli archi obbiettivi. Il che dà modo di tracciare la rete dei meridiani e paralleli.

Descritto col raggio della sfera una semicirconferenza che rappresenti il semimeridiano iniziale, fattane la divisione nei suoi gradi latitudinali, le rette condotte pei punti di divisione e normalmente al diametro polare rappresentano i paralleli, e se sul prolungamento del raggio equatoriale si portano successivamente i gradi longitudinali dell'equatore, uguali ai gradi latitudinali del meridiano, si hanno i punti pei quali debbono passare i semicircoli che rappresentano i successivi semimeridiani e che hanno i centri sulla stessa retta nella quale si proietta l'equatore.

Tale proiezione può valere a rappresentare il fuso sferico compreso fra due dati meridiani. Se il fuso è di 360° , si ha la mappa di tutta la sfera. Ma il mappamondo che così ne vien fuori risulta di ben poca soddisfazione.

Ad acquistare una chiara idea delle alterazioni lineari ed angolari diamo la seguente tavola che offre di 10° in 10° di latitudine i moduli principali m_1 e m_2 , il modulo m'' del parallelo, il modulo angolare p , il semierrore ε dell'angolo più sformato, essendovi aggiunta l'assissa X valutata in minuti primi equatoriali.

l	X	m_1	m_2	m''	p	ε
0°	$0',0$	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	$0^\circ.00'.00''$
10	597,0	1,09204	0,91572	1,01543	1,19256	5. 02. 18
20	1175,8	1,19841	0,33444	1,06418	1,43628	10. 18. 51
30	1718,9	1,32950	0,75216	1,15470	1,76758	16. 06. 07
40	2209,7	1,50399	0,66490	1,30540	2,26198	22. 45. 37
50	2633,5	1,75995	0,56820	1,55572	3,09743	30. 47. 23
60	2977,2	2,18889	0,45685	2,00000	4,79128	40. 53. 36
70	3230,4	3,07289	0,32541	2,92380	9,44310	53. 56. 51
80	3385,5	5,84248	0,17116	5,75877	34,13460	70. 34. 29
90	3437,7	∞	0,00000	∞	∞	90. 00. 00

Secondo quale curva si proietta la lossodromia in questa rappresentazione? L'equazione della lossodromia in coordinate geografiche è

$$t - t' = \frac{a}{2} \tan i \log \frac{(1 + \sin l)(1 - \sin l')}{(1 - \sin l)(1 + \sin l')},$$

dove i è l'angolo costante sotto il quale la curva incontra sulla sfera i

meridiani e l' e l'' sono la latitudine e la longitudine di un dato punto per cui deve passare la curva. Esprimendo l , t , l' e l'' per mezzo di X , Y , X' e Y' si trova

$$Y - Y' = \sqrt{a^2 - X^2} \mp \sqrt{a^2 - X'^2} + \frac{a}{2} \tan i \log \frac{(a + X)(a - X')}{(a - X)(a + X')},$$

che è l'equazione della richiesta curva.

La proiezione esposta in questo paragrafo fu studiata, sotto altro punto di vista, dall'ingegnere WIECHEL (1).

§ 34. La proiezione quantitativa trattata al § 32 trova riscontro in certe rappresentazioni ovali che nel secolo XVI servivano alla delineazione dei mappamondi (2). Nelle mappe ovali del cinquecento i semimeridiani da 0° a $\pm 90^\circ$ erano archi circolari descritti, come sopra una comune corda, sul semimeridiano centrale steso in linea retta, passavano pei punti dell'equatore rettilineo diviso nei suoi gradi longitudinali ed erano minori di una semicirconferenza, raggiunta solo al limite di $\pm 90^\circ$; gli altri meridiani da $\pm 90^\circ$ a $\pm 180^\circ$ si tracciavano mediante circonferenze tutte eguali a quella che rappresentava il semimeridiano di $\pm 90^\circ$ ed in modo analogo a quanto si disse nel paragrafo precedente. I paralleli erano rette parallele all'equatore. Generalmente si tenevano fra loro equidistanti, facendoli passare pei punti del semimeridiano iniziale diviso in 180 parti uguali. Ma si usarono anche le distanze dei paralleli dall'equatore proporzionali ai seni delle latitudini, conducendoli pei punti del semimeridiano di 90° diviso in 180 parti uguali. Con che la distribuzione dei paralleli era regolata come nella proiezione ortografica meridiana.

I cartografi che nella descrizione dei mappamondi ovali si attenevano a questa ultima condizione non facevano altro che adottare per la rappresentazione dei fusi sferici limitati dai meridiani di $\pm 90^\circ$ e $\pm 180^\circ$ la proiezione esposta al § 32 Pareggiando il meridiano di 90° a quello di longitudine l' , facendo cioè $l' = \frac{\pi}{2}$ considerando che le distanze essendo conservate sull'equatore, è $x = a$, che il raggio della semicirconferenza rappresentativa del semimeridiano di 90° vale $\frac{\pi a}{2}$ che quindi si ha

$$\frac{\mu^2 a^2}{x} = \frac{\pi a}{2} \text{ e } \mu^2 = \frac{\pi}{2},$$

ponendo l'origine delle coordinate sull'equatore ed all'inizio delle longitu-

(1) *Rationelle Gradnetz-Projectionen* nel *Civilingenieur*, Jahrgang 1879. Lipsia 1879. p. 401.

(2) Dei mappamondi ovali usati nel cinquecento ho discorso in *Le professioni*, ecc. Cap. VIII, Art. III. Ne discorrerò di nuovo in un prossimo fascicolo del BOLLETTINO.

dini, ossia nel centro della semicirconferenza ora nominata, le equazioni generali che reggono le proiezioni dei due detti fusi sferici sono

$$X = \frac{\pi a}{2} \operatorname{sen} l, \quad Y = a \left(t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi a}{2} \cos l.$$

Ed è

$$\delta = -l, \quad m' = \frac{\pi}{2}, \quad m'' = \frac{l}{\cos l}.$$

La proiezione, dunque, che quei cartografi adoperavano pei due fusi estremi della sfera ampli per 90° e formanti l'emisfero meridiano inferiore, supposto diviso in due parti uguali dal semimeridiano di 180° , era, e ciò molto probabilmente a loro insaputa, una vera rappresentazione quantitativa che amplificava le aree obbiettive nel rapporto costante $\frac{\pi}{2}$ ed in cui gli archi dei meridiani sferici erano pure ingranditi nello stesso rapporto $\frac{\pi}{2}$ e quelli dei paralleli nel rapporto variabile $\frac{l}{\cos l}$.

Ben diverso era il sistema di proiezione per gli altri due fusi sferici limitati dai meridiani di 0° e $\pm 90^\circ$, formanti l'emisfero meridiano superiore e che insieme ai due primi compivano la sfera. Misti perciò e parzialmente quantitativi erano quei mappamondi. I quali furono posti in onoranza dal cartografo JACOPO GASTALDO (1).

IV.

Di altre proiezioni equivalenti e dei mappamondi misti.

§ 35. Riserbandoci di discorrere di altre proiezioni equivalenti, ad esempio delle policoniche (2) e di certe proiezioni che scaturiscono assumendo arbitrariamente la funzione della latitudine l e della longitudine t a fine di esprimere una delle coordinate della proiezione (3), ci limitiamo a dire dei mappamondi misti.

Abbiamo, altrove (4), detto del mappamondo misto in tre parti risultante dalla proiezione cilindrica per la zona che si estende per uguale latitudine dall'una e dell'altra parte dell'equatore e dalla proiezione po-

(1) Vedi *Le proiezioni*, ecc., Cap. VIII, § 21.

(2) Delle proiezioni policoniche equivalenti trattarono il TISSOT (*Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*. Paris, 1881, p. 256) e l'HERZ (*Lehrbuch der Landkarten projectionen*. Leipzig, 1885, p. 145).

(3) Tale questione fu abbozzata in *Le proiezioni*, ecc., Cap. VI, Art. IV.

(4) Vedi *Le proiezioni*, ecc., p. 333, 338, 359 e 366.

lare per le rimanenti due zone ed osservato come sia utile che ambe le proiezioni obbediscano alla medesima legge generale, che cioè ambe sieno equidistanti, od equivalenti, od isogoniche, o di altro ugual genere e che il modulo lineare del parallelo abbia lo stesso valore sui contorni della proiezione cilindrica e della polare (1). Qui trattiamo dei mappamondi misti in cinque parti coll'impiego della proiezione cilindrica per la zona equatoriale simmetrica rispetto all'equatore, della polare per le due zone polari di uguale ampiezza, della conica per le rimanenti due zone intermedie (2).

È noto che, per le proiezioni cilindriche (3), le equazioni generali, essendo α un coefficiente costante, sono

$$X = X(l), \quad Y = \alpha t$$

ed i moduli principali, spettanti al meridiano ed al parallelo si esprimono con

$$m_1 = \frac{1}{r_1} \frac{dX}{dl}, \quad m_2 = \frac{\alpha}{r_2},$$

che, per le proiezioni coniche (4), introducendo le coordinate polari e dicendo λ un coefficiente costante si ha

$$\rho = \rho(u), \quad v = \lambda t$$

$$m_1 = \frac{1}{r} \frac{d\rho}{du}, \quad m_2 = \frac{\lambda \rho}{r_2},$$

e che per le proiezioni polari, in cui λ uguaglia l'unità, è

$$R = R(u), \quad v = t,$$

$$m_1 = \frac{1}{r_1} \frac{dR}{du}, \quad m_2 = \frac{R}{r_2}.$$

(1) Primo a dare esempio di un mappamondo misto fu il MERCATORE, che, non potendo nella sua gran tavola universale a latitudini crescenti, edita nel 1569, rappresentare le regioni polari, completò la carta colla descrizione della zona polare boreale in proiezione polare equidistante. Vedi *Le proiezioni*, ecc., p. 259 e 268.

(2) I mappamondi misti in cinque parti, come ne dice il MAYER (op. cit. p. 423), furono per la prima volta proposti dal SEGNER nel *Berliner astron. Jahrbuch*, 1781, p. 44. Il quale, volendo fare le mappe delle cinque zone fondamentali terrestri, ricorre per la zona torrida alla proiezione centrografica sul cilindro circoscritto, per le due zone temperate alla centrografica sul cono circoscritto, per le due glaciali alla centrografica polare (Della proiezione centrografica cilindrica, della centrografica conica e della centrografica polare si tratta in *Le proiezioni*, ecc., Cap. IV, § 32, III, 56; II, 18). E, dovendo i comuni contorni delle zone avere lo stesso modulo lineare, avviene che il nominato cono circoscritto tocca la sfera alla latitudine di $2(23.^\circ 28')$ pari a $46.^\circ 56'$ e che i raggi dei cerchi contenenti le zone glaciali, detto α il raggio della sfera, sono $\frac{\alpha \sin 23.^\circ 28'}{\cos 19.^\circ 36'}$.

Chi m'ha fatto rammentare i mappamondi misti è il GELICICH (*Zur Geschichte der Arealbestimmung eines Landes* estratto da *Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde*, Tom. XXI, 1886, d. 11), il quale accenna al metodo del SEGNER.

(3) Vedi il precedente § 21 e *Le proiezioni*, ecc., Cap. IV, § 2.

(4) Vedi il precedente § 4 e *Le proiezioni*, ecc., Cap. III, §§ 2 e 3.

Ora è utile che le tre proiezioni di cui si fa uso nella composizione del mappamondo seguano la stessa legge generale affinchè la carta goda, dovunque, delle proprietà che sono loro comuni e che il modulo m_2 sia identico sui comuni contorni delle zone affinchè risultino uguali le loro rettificazioni. Questa ultima condizione, dette u_1 e u_2 le colatitudini estreme della zona boreale intermedia, dà

$$\begin{aligned}\lambda \rho(u_1) &= \alpha, \\ \lambda \rho(u_2) &= R(u_2).\end{aligned}$$

Volendo che il mappamondo sia equivalente, considerando il caso della sfera, per la quale, detta c una costante, è (1)

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\lambda} (c - 2 \cos u)$$

e

$$R = 2a \sin \frac{u}{2},$$

facendo $\alpha = a$, con che la proiezione cilindrica conserva le distanze sull'equatore e s'identifica collo sviluppo del cilindro circoscritto alla sfera (2), le due superiori equazioni divengono

$$\begin{aligned}\lambda(c - 2 \cos u_1) &= 1, \\ \lambda(c - 2 \cos u_2) &= 2(1 - \cos u_2).\end{aligned}$$

Le costanti λ e c che fissano la proiezione conica equivalente vengono così a determinarsi quando siano note le colatitudini u_1 e u_2 dei paralleli di separazione delle zone. Se questi sono il tropico ed il circolo polare, con che si vengono a rappresentare in proiezione polare le due zone glaciali, in proiezione conica le due temperate ed in proiezione cilindrica la zona torrida, si ha

$$u_1 = 66^\circ 32', \quad u_2 = 23^\circ 28'$$

e si trova

$$\lambda = 0,8039, \quad c = 2,2403$$

Quando siano date le costanti λ e c , sia cioè stabilita la proiezione conica, si ha quanto occorre per trarne le colatitudini u_1 e u_2 dei paralleli separatori delle zone.

Potrebbe anche richiedere di determinare le costanti λ e c e le colatitudini u_1 e u_2 in guisa che siano conservate le distanze sul parallelo di 45° e che i moduli principali riescano, a tale latitudine, l'uno massimo e l'altro minimo.

(1) Vedi il precedente § 4 e *Le proiezioni*, ecc., Cap. III, §§ 25 e 34.

(2) *Le proiezioni*, ecc., IV, §§ 4 e 14.

La seconda condizione, riferendosi al § 4, dà

$$c = \cos 45^\circ + \frac{1}{\cos 45^\circ} = 2,12132,$$

e la prima

$$\lambda (c - 2 \cos 45^\circ) = \operatorname{sen}^2 45^\circ,$$

da cui si trae

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70711;$$

si trova poi

$$\cos u_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2},$$

e

$$u_1 = 69^\circ 18', \quad u_2 = 31^\circ 24'.$$