

E. — FORMOLE ED OSSERVAZIONI
SUL CALCOLO DELLA GRANDEZZA DELL'ORIZZONTE.

Nota del socio prof. F. MINUTILLI.

Da un punto A (1), situato ad una altezza conosciuta h , si scopre una parte della superficie terrestre, rappresentata dalla calotta LHK. La tangente visuale AK si può calcolare facilmente, conoscendo il raggio terrestre. Infatti nel triangolo rettangolo AKT si ha

$$AK = \sqrt{AT^2 + KT^2} = \sqrt{R^2 + 2hR + h^2 - R^2} = \sqrt{h(2R + h)}$$

Ma per la rifrazione atmosferica la tangente visuale effettiva è alquanto più lunga della tangente geometrica, nel rapporto di 1.074 a 1, onde la vera tangente visuale (1) sarà $= 1.074 \sqrt{h(2R + h)}$.

Varie formole più semplici sono state proposte per calcolare con maggior facilità la tangente visuale da un punto del quale sia nota l'altezza. Lo Schlagintweit propone la seguente: conosciuta in piedi inglesi ($1 = m. 0.3048$) l'altitudine del punto di osservazione, se ne estragga la radice, e si avrà la tangente visuale in miglia geografiche da m. 1.852. Questa formola dà in ogni caso un valore sensibilmente più piccolo del vero, e però non è da consigliarne l'uso.

Il capitano Koldewey propone la formola $x = 1.163 \sqrt{h}$, nella quale x è la tangente visuale in miglia geografiche italiane, ed h è l'altitudine dell'occhio dell'osservatore in piedi renani ($1 = m. 0.314$). Questa formola conduce ad un risultato alquanto superiore al vero, ed è piuttosto incomoda giacchè non accade quasi mai che le altezze sieno date in piedi renani.

Assai più esatta è la formola $x = 121.2 \sqrt{h}$, nella quale h è l'altitudine in chilometri ed x è la tangente visuale pure in chilometri. Per ottenere un'approssimazione ancor maggiore si può aggiungere un'altra cifra decimale al coefficiente di $\sqrt{h}$, facendo

$$(2) \quad x = 121.26 \sqrt{h}$$

(1) Vedi la FIG. 1 nell'altra nota dell'A., a pag. 42 del fascicolo del gennaio p. p. del BOLLETTINO.

L'errore che si commette adoperando questa formola è affatto nullo per le piccole altezze, è appena di pochi metri in più per le altezze che non superano i 4,000 metri e da 0 a 80 m. in meno per le altezze da 4,000 a 10,000 metri.

Se il valore di h è dato in metri, anzichè in chilometri, si otterrà la tangente in chilometri con la formola $x = 3.834 \sqrt{h}$.

Vogliasi, p. e., calcolare la tangente visuale dalla sommità dell'Etna alta 3,313 m.

Con la formola (1) si avrà	$x = \text{km.}$	220.693
» » » Schlagintweit	»	193.291
» » » Koldeway	»	221.583
» » » (2)	»	220.693

Per la vetta del Gaurisancar, alta 8,840 m., si avrebbe:

Con la formola (1)	km.	360.578
» » » Schlagintweit	»	315.906
» » » Koldeway	»	361.790
» » » (2)	»	360.530

La formola (2) per la sua grande approssimazione potrà dunque riuscire molto utile a chi non ricorda o non ha il tempo di adoperare la formola rigorosamente scientifica $x = 1.074 \sqrt{h(2R + h)}$.

Ma nessuno, a quanto sappiamo, ha sinora proposto una formola facile per calcolare non già la tangente visuale, ma la superficie terrestre visibile da una data altezza h .

La calotta sferica KPLH, ossia la superficie terrestre visibile dal punto A, ha per misura $PN \times 2R\pi$; ma $PN = R - \cos s$, e nel triangolo KTA abbiamo

$$\cos s = \frac{KT}{AT} = \frac{R}{R + h}$$

onde la superficie della calotta KPLH sarà

$$x = 2R\pi(R - R \cos s) = 2R\pi\left(R - \frac{R^2}{R + h}\right) = 2R\pi \frac{Rh}{R + h} = 2\pi R^2 \frac{h}{R + h}$$

ma la superficie del globo, considerando la Terra come una sfera perfetta, è $4\pi R^2$. Dunque la superficie terrestre visibile da un punto di altezza h , è eguale ad un emisfero terrestre moltiplicato per h e diviso pel raggio terrestre più h .

E sostituendo a R il suo valore in chilometri 6,371 si avrà

$$(1) x = \text{km.q. } 255,032,000 \frac{h}{6,371 + h}$$

Sieno due altezze h, h' ; le calotte terrestri visibili da esse saranno rispettivamente :

$$x = 2\pi R^2 \frac{h}{R + h} \quad x' = 2\pi R^2 \frac{h'}{R + h'}$$

ma trattandosi di piccole altezze, come son quelle sulle quali può ascendere l'uomo, non escluse le vette dei monti più alti, che misurano poco più della millesima parte del raggio terrestre, si possono in pratica considerare come eguali i due denominatori $R + h, R + h'$, onde avremo :

$$x : x' :: h : h'$$

ossia: *le superficie visibili stanno fra loro come le altezze.*

Facendo $h = 1$ chilometro sarà :

$$(2) x = \text{km.q. } 255,032,000 \frac{1}{6,371} = \text{km.q. } 40,024$$

cioè: *la superficie visibile da una data altezza espressa in chilometri è eguale all'altezza moltiplicata per 40,024. Se l'altezza è espressa in metri, la superficie, in chilometri quadrati, sarà data approssimativamente dall'altezza moltiplicata per 40.*

L'errore che si commette adoperando questa formola è di pochi chilometri. Per es.: dalla vetta dell'Etna si avrebbe con la formola (1) km.q. 132,551 e con la formola (2) km.q. 132,520; per la vetta del Gaurisancar si avrebbe rispettivamente km.q. 353,377 e km.q. 353,600.

Ma l'orizzonte quale lo abbiamo considerato sin qui, ossia l'orizzonte *fisico*, coincide con l'orizzonte *prospettivo* solo in alto mare, dove nulla impedisce allo sguardo di spaziare su tutta la calotta visibile. Sulla terra, e specialmente nelle contrade montagnose, sorgono ad ogni pie' sospinto mille ostacoli che impediscono di vedere molti luoghi compresi entro l'orizzonte fisico. Or come si farà per sapere se da un punto A (fig. 2), senza esservi mai stati, sia o no visibile un altro

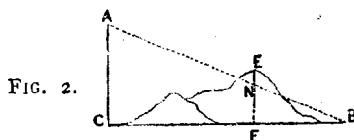


FIG. 2.

punto B? È chiaro che perchè da A non si vegga il punto B, compreso

entro la tangente visuale di A, fa d'uopo che una montagna E, o un altro ostacolo qualunque, lo impedisca, e non potrà impedirlo se il detto ostacolo non s'inalzi al disopra della retta AB, cioè se non sia $EF > NF$. Ciò basta per risolvere il problema. Si costruisca un triangolo rettangolo ABC, nel quale il cateto AC rappresenti la differenza H di altitudine fra A e B, e l'altro cateto CB la distanza che corre fra B ed il piede C della verticale abbassata da A. Poi su di una buona carta geografica si congiungono con una retta i due punti A e B, e si osserva attentamente se lungo questa retta s'incontri qualche vetta che s'inalzi al disopra dell'ipotenusa AB; il che si otterrà facilmente, osservando che nei due triangoli simili ABC, NBF si ha $NF : H :: FB : BC$, ossia chiamando h l'altezza NF, d la distanza FB, e D la distanza BC.

$$h : H :: d : D$$

onde
$$h = \frac{H \times d}{D}$$

vuol dire che, perchè un'elevazione E possa impedire che il punto B sia visibile dalla sommità A, è necessario che la sua altezza H' sia maggiore della differenza di altezza fra A e B, moltiplicata per la distanza che corre fra l'ostacolo e B, e divisa per la distanza AB.

Esempio — Si domanda se dalla vetta di M. Codento (2,014 m.) presso le sorgenti dell'Aniene, si può vedere il borgo di Valmontone (360 m.).

Da M. Codento si ha una tangente visuale di km. 172; misurando sulla Carta la distanza fra esso monte e Valmontone risulta di 38 km., onde Valmontone è compreso nell'orizzonte fisico di M. Codento. Ma unendo questi due luoghi con una retta si vedrà che questa passa per il M. Scalambra, alto 1,453 m. (massima sommità dei Monti Prenestini, e lontano da Valmontone km. 20. 500). Avremo così:

$$H = \text{m. } 2,014 - 360 = \text{m. } 1,654$$

$$H' = \text{m. } 1,453 - 360 = \text{m. } 1,093$$

$$D = \text{km. } 38$$

$$d = \text{km. } 20. 500$$

onde $h = \frac{H \times d}{D} = 891$ metri, sicchè $H' = 1,093$ m. essendo maggiore di 891 m., il M. Scalambra impedirà di vedere Valmontone dalla cima del Codento.

La superficie solida del globo non presenta mai grandi estensioni perfettamente livellate, ma sempre terreni montuosi, od ondulati, o pianure inclinate. Si comprenderà facilmente come in una pianura inclinata

le tangenti visuali non saranno perfettamente eguali a quelle che ci dà il calcolo nell'ipotesi della superficie terrestre perfettamente sferica e di eguale livello, ma saranno più corte o più lunghe a seconda che il suolo s'inalza o s'abbassa. Vediamo se si può calcolare, almeno approssimativamente la loro lunghezza, senza uscire dai confini della geometria elementare.

Supponiamo che si voglia calcolare la tangente visuale del punto C (fig. 1) dal lato ove il suolo s'inalza. La superficie terrestre sarà allora rappresentata da PI anzichè da PD, e la tangente sarà CI. Potremo in questo caso, senza errore sensibile, considerare come raggio terrestre la retta TI, ossia $R + h'$, chiamando h' l'altitudine dell'estremo orizzonte, che si può sempre conoscere approssimativamente. Nel triangolo CIT che potremo considerare come rettangolo, avremo:

$$x^2 = CT^2 - CI^2 = (R + h)^2 - (R + h')^2$$

$$x = \sqrt{h(2R + h) - h'(2R + h')}$$

Se poi si vuol calcolare la tangente CI dal lato dove il suolo si abbassa, avremo per la stessa ragione:

$$x' = \sqrt{h(2R + h) + h'(2R + h')}$$

e con una sola formula, chiamando sempre x la tangente

$$x = \sqrt{h(2R + h) \mp h'(2R + h')}$$

Supponendo di trovarci all'altitudine di 4,000 metri nel mezzo di una pianura i cui punti estremi all'orizzonte presentassero un dislivello di 400 metri, avremo che la tangente visuale verso il punto più elevato sarebbe di km. 236.366, e quella verso il punto più basso sarebbe di km. 248.491, mentre in pianura perfettamente a livello sarebbe di km. 242.505.

È assai frequente il caso che stando in A (fig. 3), d'onde non si vede il punto F, si vegga invece la vetta B di una montagna ancor più lontana. È il caso citato in tutti i trattati di Geografia, di colui che stando sulla riva del mare non vede lo scafo di una nave lontana in alto mare, ma ne scorge chiaramente le antenne. Per vedere dal punto A la vetta B questa deve inalzarsi al disopra della tangente prolungata AD, il che avverrà se la vetta B sarà visibile dal punto C, estremità della tangente visuale di A, o, in altre parole, se la somma delle due tangenti visuali AC, BE è maggiore della distanza AB.

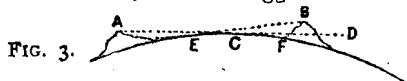


FIG. 3.

1° *Esempio* — Si domanda se dalla vetta di M. Argentario si vedono le montagne della Corsica.

L'altitudine di M. Argentario essendo di m. 635, la tangente visuale secondo la formola $x = 121.26 \sqrt{0.635}$ è di km. 96.627. La più vicina fra le alte montagne della Corsica è M. Incudine, distante 196 km. Esso rimane dunque al di là della tangente visuale, e la sua base non è visibile da M. Argentario; ma essendo alto 2,136 m., la tangente visuale dalla sua sommità è di km. 177.221. La somma delle due tangenti è di km. 273.848, ossia maggiore della distanza che separa i due monti, i quali però sono chiaramente visibili l'uno dall'altro.

2° *Esempio* — Si domanda se dalla palla della cupola di S. Pietro (m. 158.59) si vede M. Argentario, lontano 120 km.

Adoperando la nota formola si ottiene che le due tangenti visuali sono di km. 48.290 e 96.627. La loro somma è km. 144.917, ossia più della distanza, quindi M. Argentario dovrebbe essere visibile dalla palla della cupola di S. Pietro; ma unendo con una retta questi due punti su di una buona carta geografica, si vede che essa passa per i Monti della Tolfa, e precisamente per Poggio Spiriti, alto 402 m. e lontano 32 km. da S. Pietro, e questo ostacolo impedisce di vedere Monte Argentario. Infatti, per quel che abbiamo detto più sopra, sarà:

$$H = \text{m. } 635 - 158.59 = \text{m. } 476.41$$

$$H' = \text{m. } 402 - 158.59 = \text{m. } 243.41$$

$$D = \text{km. } 120$$

$$d = \text{km. } 32$$

$$\text{onde } \frac{H+d}{D} = \text{m. } 127.04, \text{ ossia minore di } H'.$$

Sin qui abbiamo considerato la Terra come perfettamente sferica. Osserviamo ora quali risultamenti si avrebbero nel calcolo dell'orizzonte se per uno scrupolo di esattezza si volesse tener conto dello schiacciamento del nostro pianeta. Basterebbe nella formola $x = 1.074 \sqrt{h(2R+h)}$

assegnare a R non già il valore di 6,371 km., raggio di una sfera di superficie eguale a quella della Terra, ma bensì il valore del raggio terrestre corrispondente al punto di osservazione, il quale raggio si trova facilmente mercè la formola $R' = R (1 - \alpha \sin^2 \varphi)$. Ora secondo il Clarke il raggio equatoriale sarebbe di m. 6,378,253, il raggio polare

di 6,356,521, e lo schiacciamento di $\frac{10}{2935}$. Il raggio terrestre corrispon-

dente alla latitudine di 45° sarebbe $R' = 6,378,253 \left(1 - \frac{10}{2935} \sin^2 45^\circ \right)$

ossia di m. 6,367,387. Adoperando ora la formola $x = 1,074 \sqrt{h(2R + h)}$ si avrebbe per le tangenti visuali di un'altitudine di 1,000 e di 10,000 metri:

	per 1,000 m.	per 10,000 m.
All' equatore	m. 121,306	m. 383,740
a 45° di lat.	» 121,203	» 383,415
al polo	» 121,100	» 383,088

mentre le tangenti calcolate dando ad R il valore di 6,371 km. sarebbero rispettivamente di m. 121,238 e 383,525. La differenza è tanto piccola che non vale la pena di tenerne conto, e nella pratica si può per il calcolo dell'orizzonte, come per quasi tutti i problemi di Geografia matematica, considerare la Terra come una sfera perfetta del raggio di 6,371 chilometri.

Un'altra conseguenza dello schiacciamento della Terra è che a stretto rigore scientifico l'orizzonte non ha forma perfettamente circolare, ma è invece un'ellisse della quale l'osservatore non occupa il centro. Infatti il meridiano terrestre non è un circolo, ma una linea irregolare che molto si avvicina ad un'ellisse, quantunque la differenza fra i due assi sia minima; ed anche coloro che non sono molto versati nelle matematiche comprenderanno facilmente che, mentre le tangenti condotte da un punto esterno alla circonferenza d'un circolo sono eguali fra loro, le tangenti invece che da un punto esterno si conducono alla periferia di un'ellisse non sono eguali fra loro se non quando il dato punto si trovi sul prolungamento di uno dei due assi; in ogni altro caso si avranno sempre due tangenti ineguali, di cui la più lunga è quella che si dirige verso il semiasse minore, ossia verso il polo, nel caso nostro; e la differenza fra le due tangenti cresce a misura che il punto dato si allontana dai due assi, e raggiunge il massimo quando se ne trova a 45° . Ne segue che a stretto rigore scientifico l'orizzonte è un circolo perfetto per l'osservatore che si trovi sull'equatore o sui poli, ma per chi si trovi su qualunque altro punto del globo sarà più esteso verso la parte che guarda al polo, ossia verso il Nord per chi sta nell'emisfero boreale, e che la differenza fra le due tangenti visuali cresce a misura che dal polo o dall'equatore ci avanziamo verso il 45° di latitudine.

È stata trattata più volte la questione se i paralleli sieno circoli o anch'essi ellissi. Illustri scienziati come il Clarke e lo Schubert sosten-

nero che l'equatore non è un circolo perfetto, ma un'ellisse di eccentricità minima; anzi giunsero persino a determinare in quali punti della superficie terrestre il massimo ed il minimo asse equatoriale toccano la curva dell'equatore. Sino ad ora la questione non è risolta, ma pare molto probabile che così l'equatore come i paralleli non sieno circoli perfetti, ma ellissi. In questo caso sarebbero di diversa lunghezza non solamente le due tangenti visuali che si dirigono verso il Nord e verso il Sud, ma anche quelle che si dirigono verso gli altri due punti cardinali e la maggiore sarebbe quella che si avvicina al meridiano che passa pel punto estremo dell'asse equatoriale minore. Questo, secondo il Clarke (1), passerebbe per l'Isola di Seilan, sicchè in Italia le tangenti visuali verso l'Est sarebbero alquanto più lunghe di quelle verso l'Ovest. Ma ad ogni modo le differenze sono così insignificanti che in nessun caso varrebbe la pena di tenerne conto. Se fosse possibile misurare con esattezza scrupolosa la lunghezza delle tangenti visuali che dal luogo di osservazione si dirigono verso i vari punti dell'orizzonte, le loro differenze ci condurrebbero facilmente a determinare la forma del geoide più esattamente che non si sia potuto fare sinora; ma all'atto pratico sono tali e tante le difficoltà che s'incontrano nel misurare con precisione le dette tangenti visuali, che è giuoco forza rinunziarvi, almeno sino a che la scienza, conoscendo più profondamente la teoria della rifrazione, non trovi nuovi metodi, e che più precisi strumenti non vengano in ajuto del geodeta.
