

D. — LE SFERE COSMOGRAFICHE
E SPECIALMENTE LE SFERE TERRESTRI (1).

Memoria del Socio M. FIORINI, professore all'Università di Bologna.

Il NORDENSKIÖLD (2) menziona un'anteriore mappa simile a quella del FLORIANI, dovuta ad ALFONSO DE SANCTA CRUCE, colorata e colle dimensioni di 1440 per 790 millimetri. La quale è nella Biblioteca Reale di Stoccolma ed ha per titolo: *Nova verior et integra totius orbis descriptio nunc primum in lucem edita per Alphonsum de Sancta Cruce Caesaris Caroli V archicossmographum A. D. MDXLII*. Soltanto dal confronto delle due mappe potrebbe arguirsi se ed in quale misura il FLORIANI abbia preso ad imitare l'opera dell'arcicossmografo di CARLO V (3).

Il CERADINI (4), che ha avuto agio di avere contemporaneamente sott'occhio (e ciò non è dato a tutti, come non fu dato a me) il Mappamondo del FLORIANI e la riproduzione della mappa cordiforme del MERCATORE (5), ha potuto stabilire che di questa quello è, in certo

(1) Continuazione e fine. Vedi BOLLETTINO del maggio u. s., pag. 331.

(2) *Facsimile-atlas*, p. 94.

(3) Nel 1525 fu pubblicata una mappa della Sarmazia, Polonia, ecc., per opera di un FLORIANI. Lo dice il *Catalogus auctorum tabularum geographicarum quotquot ad nostram cognitionem hactenus pervenere*, che va annesso al *Theatrum Orbis Terrarum* di ABRAMO ORTELIO, dove leggesi: FLORIANUS (*in lucem dedit*) *Tabulam Sarmatiae, Regni Poloniae, et Ungariae, utriusque Valachiae, nec non Turciae, Tartariae, Moscoviae et Lituaniae partem comprehendentem. Cracoviae 1528*. Il NORDENSKIÖLD (*Facsimile-atlas*), p. 114, ne crede autore, non un FLORIANI da Udine, ma quel FLORIANUS UNGLERIUS, che nel 1512 stampò a Cracovia la *Introductio in Ptholomei Cosmographiam*. Chi voglia attribuire quella mappa ad ANTONIO FLORIANI deve ammettere che questi sia, se non il primo, uno dei primi figli di GIOVANNI DELLE CANTINELLE.

(4) Op. cit., p. 65 e segg.

(5) Del mappamondo cordiforme del MERCATORE del 1538 ho discorso in: *Le proiezioni cordiformi nella cartografia ed in Gerardo Mercatore e le sue Carte geografiche* (Boll. della Soc. Geog. ital., 1889, p. 561, e 1890, p. 100 e 340).

qual modo, plagio, trovandosi immutate le posizioni geografiche de'vari luoghi e copiate letteralmente tutte le iscrizioni e le leggende e perfino gli errori ortografici. Ed io posso aggiungere che anche il sistema di proiezione è identico quando, a parte a parte, si considerino i singoli settori, avendo il FLORIANI praticato, per ciascuno di essi, il metodo cordiforme equivalente impiegato dal MERCATORE per la rappresentazione dei due emisferi. Tuttavia l'artista udinese ha il merito di avere composto un mappamondo a settori con aspetto ben diverso da quello della Mappa Mercatoriana e tentata una nuova via per il rivestimento dei globi.

La regola seguita dal FLORIANI per la descrizione piana dei settori degli emisferi fu più tardi proposta, con qualche modificazione, dal VAREN per la delineazione dei fusi di 30° (1). In fatto, questi, conservando le distanze sul meridiano centrale e sull'arco equatoriale, ambi rettilinei e fra loro perpendicolari, come pure sui paralleli formati ad arco di circolo col comun centro nei poli, adotta in certo qual modo le regole della proiezione equivalente del WERNER, scostandosene solo in ciò che foggia l'arco equatoriale, non ad arco di circolo concentrico ai paralleli, ma a guisa di linea retta, ossia ad arco di circolo di raggio infinito.

Sarà ben difficile che la natura della carta sia tale da potersi adottare il sistema cordiforme equivalente per la delineazione dei settori, da permettere che si adagino sulla superficie del globo il meridiano centrale e gli archi dell'equatore e dei paralleli, senza che in queste linee avvengano allungamenti a rendere impossibile il loro adattamento sopra le rispondenti curve del globo. Ed il meridiano esteriore, più lungo del centrale, si raccorcerà in guisa da accordarsi sul globo col rispondente arco sferico? Così resta spiegato il motivo, per cui nè il metodo del FLORIANI, nè l'altro del VAREN ebbero pratica applicazione nella fabbrica dei globi celesti e terrestri. Chi voglia usare il metodo cordiforme per la descrizione dei settori, deve, per necessità, abbandonare l'idea di rendere uguali all'unità i coefficienti α e β , e cercare per mezzo di opportune esperienze, come già si disse al § precedente nel trattare del sistema sinussoidale, quali sieno, per una data qualità di carta che deve servire all'impressione dei settori, i migliori valori da attribuirsi ad α e β .

§ 16. — Fra i cartografi degli ultimi secoli fu una gara nella ricerca dei migliori metodi per la descrizione piana dei fusi di rivestimento

(1) *Bernardi Varenii Geographia generalis*. Napoli, 1715, Cap. XXXII, prop. V.
— Il medico BERNARDO VAREN di Amsterdam, nato verso il 1620, morto verso il 1680, pubblicò la sua opera col titolo: *Geographia generalis, in qua affectiones telluris explicantur*, in Amsterdam, 1650. Della quale si fecero parecchie edizioni: n'è rinomata quella di Cambridge, 1681, annotata dal NEWTON.

dei globi. Eccelse in tali studi ABRAMO KAESTNER (1), autore della Memoria: *Fasciarum quibus globi obducuntur, ex conis sphaerae circumscriptis, constructio*, pubblicata nel 1778 dalla Società delle Scienze di Gottinga (2).

Il KAESTNER, attenendosi agli ammaestramenti dell' olandese PIETRO SCHMIT (3), considera la superficie della sfera come una serie di strettissime zone determinate dai successivi paralleli, le quali possono assimilarsi a zone coniche circoscritte alla sfera e svolgersi quindi in piano in altrettanti segmenti di corone circolari. E però, ritenendo i paralleli del fuso descritto in piano come i cerchi nati da una successione di sviluppi di cono circoscritti alla sfera, attribuisce loro il raggio ρ dato da

$$\rho = a \cot l,$$

dove a è il raggio della sfera e l la latitudine del parallelo.

Essendo, negli accennati sviluppi, conservate le lunghezze degli archi dei paralleli compresi nel fuso, se l'ampiezza di questo chiamasi $2T$ e dicesi z l'angolo che il raggio ρ condotto al punto M (di latitudine l) del meridiano esteriore fa col meridiano centrale rettilineo, assunto come asse delle X, si ha

$$\rho z = a T \cos l$$

e quindi

$$z = T \sen l$$

L'ordinata, poi, calata da M sull'asse delle X, è

$$Y = \rho \sen z,$$

ossia

$$Y = a \cot l \sen (T \sen l),$$

ed anche, svolgendo in serie e trascurando le potenze di T superiori alla quarta,

$$Y = a (T \cos l - \frac{1}{6} T^3 \cos l \sen^2 l).$$

A fine di poter tracciare il meridiano esteriore, rimane da determinare l'ascissa X del suo punto generale M. Il KAESTNER, seguendo e perfezionando il metodo dello SCHMIT, vi riesce coll'imporre la condizione della conservazione delle distanze sul nominato meridiano. Ciò è dire che, detto dS l'elemento della curva esteriore, ossia posto

$$dS^2 = dX^2 + dY^2,$$

(1) ABRAMO KAESTNER, matematico e letterato, nato a Lipsia 1719, morto 1810.

(2) *Commentationes Societatis Regiae scientiarum Gottingensis, Classis mathematicae, Tom. I, ad annum CIOCCCLXXVIII.*

(3) Lo SCHMIT trattò della costruzione dei globi nell'opera, per noi introvabile, col titolo: *Cosmographia of Verdeeling van de gehele wereld; als mede het maken van de Hemelsche en Aardsche Globe, En alderhande kaarten, zo Platte als Ronde door Pieter Smit.* La prima edizione è del 1689; se ne ha un'altra del 1720.

dev'essere

$$dS = a d l,$$

e quindi

$$dX = \sqrt{a d l^2 - d Y^2},$$

che, svolgendo in serie, traducesi in

$$dX = a \left(1 - \frac{1}{2 a^2} \left(\frac{dY}{dl} \right)^2 - \frac{1}{8 a^4} \left(\frac{dY}{dl} \right)^4 - \text{ecc.} \right) dl,$$

ossia, ricorrendo all'ultima espressione di Y ed arrestandosi alla quarta potenza di T,

$$dX = a \left[1 - \frac{T^2}{2} \sin^2 l - \frac{T^4}{24} (8 \sin^2 l - 9 \sin^4 l) \right] dl.$$

Integrando, ponendo l'origine delle X all'equatore e facendo

$$A = 1 - \left(\frac{T}{2} \right)^2 - \frac{5}{12} \left(\frac{T}{2} \right)^4,$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{T}{2} \right)^4,$$

$$C = \frac{3}{16} \left(\frac{T}{2} \right)^4,$$

si trova

$$X = a (A l + B \sin 2 l + C \sin 4 l).$$

Dicendo, poi, v la saetta dell'arco del parallelo del punto M, abbracciato dai meridiani esteriori e w la distanza dall'equatore al punto d'incontro dello stesso parallelo col meridiano centrale, risulta

$$v = \rho (1 - \cos z),$$

ossia

$$v = 2 \rho \sin^2 \frac{z}{2},$$

e

$$w = X - v.$$

Per una data ampiezza $2T$ del fuso si possono costruire tabelle offerenti per ogni grado di latitudine, i valori di X, Y, ρ , v e w . Con che è facilitata la delineazione dell'amandorla che lo rappresenta. Invero, per mezzo delle coordinate X e Y si possono segnare, in rispondenza delle varie latitudini, i punti delle curve esteriori, le quali vengono tracciate dalle linee che li congiungono, mentre i paralleli sono archi circolari, passanti per quei punti, e di raggio uguale a ρ e col centro sul meridiano centrale. Può modificarsi tale procedimento descrivendo, anzitutto, i paralleli dopo di averne trovati i punti d'incontro col meridiano centrale per mezzo dell'ultima formola. Nella prima maniera si fa a meno di ricorrere ai valori di v e w ; nella seconda non occorre la Y.

Ecco, intanto, le tabelle, l'una per $2T = 20^\circ$, l'altra per $2T = 30^\circ$, in cui si hanno, di 10° in 10° gradi di latitudine, i valori di X , Y , ρ , v e w espressi in gradi della circonferenza massima del globo.

Tabella per la descrizione del fuso di 20° , secondo il metodo del KAESTNER :

l	X	Y	ρ	v	w
0°	0,00000	10,00000	∞	0,00000	0,00000
10	9,99843	9,84651	324,94045	0,14922	9,84921
20	19,98770	9,39133	157,41882	0,28038	19,70732
30	29,95981	8,64926	99,23919	0,37763	29,58218
40	39,90893	7,64437	68,28245	0,42925	39,47968
50	49,83211	6,40874	48,07685	0,42906	49,40305
60	59,72854	4,98098	33,07973	0,37715	59,35139
70	69,60449	3,40489	20,85396	0,27984	69,32465
80	79,46286	1,72794	10,10280	0,14889	79,31397
90	89,31243	0,00000	6,00000	0,00000	89,31243

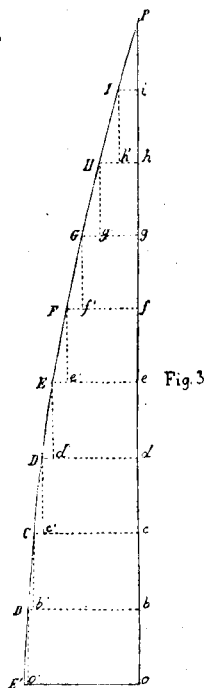
Tabella per la descrizione del fuso di 30° , secondo il metodo del KAESTNER :

l	X	Y	ρ	v	w
0°	0,00000	15,00000	∞	0,00000	0,00000
10	9,99737	14,76702	324,94045	0,33572	9,66166
20	19,97167	14,07649	157,41881	0,63063	19,34104
30	29,90768	12,95331	99,23919	0,84900	29,05868
40	39,79143	11,43650	68,28245	0,96455	38,82688
50	49,61670	9,57731	48,07685	0,96360	48,65310
60	59,38451	7,43590	33,07973	0,84658	58,53793
70	69,10262	5,07871	20,85396	0,62788	68,47474
80	78,78332	2,57596	10,10279	0,33392	78,44941
90	88,44687	0,00000	0,00000	0,00000	88,44870

Volendo che i meridiani risultino descritti, sul globo, di 10° in 10° di longitudine, basterà, nel caso di $2T = 30^\circ$, tenere occulto, in ciaschedun fuso, il meridiano centrale, dividere gli archi dei paralleli in tre parti e congiungere con opportune linee gli omonimi punti di divisione. Se poi, è $2T = 20^\circ$, altro non occorre che tracciare con una retta, in ciaschedun fuso, il meridiano centrale.

Le lunghezze dei meridiani esteriori e dei paralleli del fuso sferico rimanendo immutate nell'amandorla che n'è la figura piana e trovandosi accorciato il meridiano centrale, si fa evidente che l'amandorla, nell'atto di applicarla sul globo dev'essere stirata, nella direzione dell'asse maggiore, di quel tanto che è necessario affinchè questo asse diventi uguale, in lunghezza, al semimeridiano del globo, operando in guisa che non avvengano alterazioni nelle dimensioni dei meridiani esteriori, dell'equatore e dei paralleli.

Tale è, nella sua generalità, il metodo del KAESTNER, seguace dello SCHMIT. Questi, a dir vero, ha proceduto un po' diversamente nella ricerca delle ascisse X, perchè a' suoi tempi non erano noti i metodi analitici d'integrazione; tuttavia, come buon matematico, seguendo le norme allora in uso, ha saputo superare le difficoltà incontrate per via. Ecco in breve il suo procedimento (1).



(Fig. 3).

Essendo (fig. 3) OE' il semiarco equatoriale del fuso, sviluppato in linea retta nel piano, OP la retta normale alla precedente e rappresentante il quadrante del meridiano centrale, restandone minore in riguardo alla lunghezza, e E'FP il quadrante del meridiano esteriore sul quale sono conservate le lunghezze dei rispondenti archi del globo, s'intenda divisa questa linea E'FP, nei punti B, C, D..., in un certo numero di parti uguali e tale che il divario tra queste e le corde che le sottendono risulti trascurabile, e, calate dai detti punti le perpendicolari Bb, Cc, Dd.... sopra OP e le B'o', C'b' D'c'.... sopra le sottostanti ordinate, sia, per il punto generale F,

$$E'CF = S, \quad Of = X, \quad Ff = Y.$$

Questi stessi elementi, pel punto successivo G, divengono

$$S + \Delta S, \quad X + \Delta X, \quad Y + \Delta Y,$$

ed è

$$\Delta X = \sqrt{\Delta S^2 - \Delta Y^2}.$$

Facendo variare la latitudine in modo uniforme, i valori di ΔS risultano fra loro uguali; se, ad esempio, quella varia di grado in grado, questi riescono pari al grado del meridiano del globo. E però, fatta una

(1) Non conosciamo, come s'è detto nella nota precedente, l'opera dello SCHMIT, ma il suo metodo ci è reso noto dal KAESTNER. (Op. cit., p. 29).

tabella che offra, per ogni grado di latitudine, i valori di Y calcolati in base alla sua espressione superiormente riferita, bisogna formarne un'altra che esibisca i decrementi ΔY delle ordinate e quindi, ricorrendo all'ultima formola, quella che dà gl'incrementi ΔX , le cui successive somme danno le ascisse X dei successivi punti della curva esteriore del fuso.

Ed ecco le tabelle che danno, per $2T = 20^\circ$ e $2T = 30^\circ$ e di 10° in 10° di latitudine, i valori di X , Y , e w insieme a quelli di ΔX e ΔY , essendosi assunto per unità il grado della circonferenza massima del globo. Si sono tralasciati i valori di ρ e v che si trovano nelle precedenti tabelle; vi si potrebbero anche omettere, per la stessa ragione, quelli di Y .

Tabella per la descrizione del fuso di 20° , secondo il metodo dello SCHMIT:

l	Y	ΔY	ΔX	X	w
0°	10,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	9,84651	0,15349	9,99882	9,99882	9,84960
20	9,39133	0,45518	9,98963	19,98845	19,70807
30	8,64926	0,74207	9,97243	29,96088	29,58324
40	7,64437	1,00489	9,94938	39,91026	39,48101
50	6,40874	1,23563	9,94938	49,83363	49,40457
60	4,98098	1,42776	9,92337	59,73118	59,35403
70	3,40489	1,57609	9,89755	69,60620	69,32636
80	1,72794	1,67695	9,87502	79,46459	79,31570
90	0,00000	1,72794	9,84958	89,31417	89,31417

Tabella per la descrizione del fuso di 30° , secondo il metodo dello SCHMIT:

l	Y	ΔY	ΔX	X	w
0°	15,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	14,76702	0,23298	9,99729	9,99729	9,66157
20	14,07649	0,69053	9,97613	19,97342	19,34279
30	12,95331	1,12318	9,93672	29,91014	29,06114
40	11,43650	1,51681	9,88429	39,79443	38,82988
50	9,57731	1,85819	9,82565	49,62008	48,65648
60	7,43590	2,14141	9,76803	59,38811	58,54153
70	5,07871	2,35719	9,71821	69,10632	68,47844
80	2,57596	2,50275	9,68175	78,78807	78,45415
90	0,00000	2,57596	9,66253	88,45060	88,45060

Altro non diciamo intorno alle regole dello SCHMIT per non ripetere quanto si disse in riguardo al metodo del KAESTNER. La differenza sta soltanto nei valori di X e w passando dalle une alle altre tabelle.

Il MAYER, scorrendo nella sua magistrale opera di cartografia (1) della descrizione piana dei fusi, ha adottato le norme dello SCHMIT e del KAESTNER, attenendosi particolarmente al primo autore per ciò che riguarda la determinazione delle ascisse X . E, considerando il caso dei fusi di 30° e prendendo per unità il raggio del globo, esibisce due tabelle offerenti, di 10° in 10° di latitudine, i valori di z , Y , ΔY , ΔX , X e ρ .

Lo STEINHAUSER, nel suo trattato di geografia matematica (2), insegna a descrivere i fusi di rivestimento: a tale fine, preso per unità il grado equatoriale che traduce in miriametri, dà in opportuna tabella di 10° in 10° di latitudine, le coordinate X e Y dei punti dei meridiani esteriori, i raggi ρ e le saette v degli archi circolari che tengono luogo dei paralleli. Le tabelle sono due: l'una pel fuso di 30° , l'altra pel fuso di 20° . L'autore non accenna ai principî sui quali è fondata la loro costruzione; ma un attento esame mostra che le ha formate seguendo le regole dello SCHMIT o quelle del KAESTNER, senza poterne conchiudere quale dei due autori sia stato il prescelto (3). Ha poi adottato il sistema introdotto dal MERCATORE, troncando i fusi verso le loro estremità, tralasciando cioè di descrivere le parti polari negli ultimi 10° di latitudine, ed applicando sul globo due cerchi di raggio uguale a 10° e col centro nei poli.

§ 17. — Anteriormente al KAESTNER scrisse sulla descrizione dei fusi il LOWIZ (4). Il quale, nella Memoria: *Commentatio de figura et*

(1) *Vollständige und gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-See- und Himmelskarten von Johann Tobias Mayer*. Erlangen, 1794, p. 595 e seg..

(2) *Grundzüge der mathematischen Geographie und der Landkarten Projection von Anton Steinhauser*. Wien 1884, p. 126.

(3) Considerando che le tabelle dello STEINHAUSER danno le ascisse X in gradi equatoriali coll' approssimazione del centesimo; che le X da noi calcolate in riguardo ai metodi dei due nominati autori, quando se ne trascurino le millesime parti, generalmente coincidono e quasi sempre combinano coi valori dello STEINHAUSER, tranne nel caso di manifesti errori di stampa; che il divario, quando esiste, non oltrepassa mai il centesimo ed ora riguarda la tabella secondo il metodo dello SCHMIT, ed ora l'altra secondo quello del KAESTNER, è lecito affermare ch' egli ha seguito o l'uno o l'altro di questi autori senza poter dire a quale siasi attenuto.

(4) GIORGIO MAURIZIO LOWIZ, n. 1722, m. 1774, coltivò l'astronomia e la cartografia. Come cartografo attese, in compagnia di TOBIA MAYER, alla composizione delle Carte pubblicate a Norimberga dall' HOMAN, di poi alla fabbricazione dei globi terrestri e celesti, fondata dal FRANTZ e mantenuta dalla Società cosmografica di Norimberga. In tale occasione scrisse l'opera: *Description complète des grands globes aux quels la Société cosmographique de Nuremberg fait travailler*. Nuremberg, 1749.

divisione segmentorum quibus magni globi coelestes et terrestres obducuntur (1), si proponeva di disegnare in piano il fuso sferico, colla condizione che nella risultante amandorla gli archi esteriori avessero la precisa lunghezza dei rispondenti meridiani sferici e che i due assi fossero un po' minori delle curve rappresentate, cioè del meridiano centrale e dell'arco equatoriale, affinchè, nell'applicare sulla sfera l'inumidita amandorla, ne avvenisse, in grazia del necessario distendimento delle sue parti, non esteso ai meridiani esteriori, il perfetto adattamento senza straccature e ripiegamenti.

L'autore, per raggiungere la meta, proietta, mediante i raggi della sfera, i punti del fuso sferico sopra la superficie generata dalla retta che si muove appoggiandosi ai due meridiani esteriori e mantenendosi parallela al piano dell'equatore. E siccome suppone estensibile tale superficie, così la intende, in seguito, spinta ed adattata sulla sfera per mezzo di pressioni dirette secondo il raggio. Considerando, poi, che la superficie sopra cui sono proiettati i punti della sfera coincide col luogo delle corde degli archi dei paralleli compresi nel fuso ed è, per ciò, cilindrica, trova che il pezzo di superficie sul quale si proietta il fuso è sviluppabile in piano e che quindi si ha modo di descrivere la richiesta amandorla. Ma, forse ad evitare le difficoltà che incontrava per via, modificò il metodo propostosi. Scarsa, per non dire nulla, è l'utilità delle formole e regole date dall'autore per la delineazione de' meridiani e paralleli. E però noi le tralasciamo.

§ 18. — Fra i cosmografi che, nel secolo passato, si occuparono della costruzione dei globi e proposero nuovi metodi per la descrizione dei fusi va annoverato il GAMACHES. Del poco, che se ne sa, siamo debitori al SAVERIEN (2). Il quale, esposti i metodi del BION (3) e del WOLF (4) e detto che le regole del primo sono di molto superiori a quelle del secondo scrittore, soggiunge che le curve da

(1) Tale Memoria, scritta e letta dal LOWIZ nel 1756, pubblicata nel 1778, dopo la morte dell'autore nelle *Commentationes Societatis Regiae scientiarum Gottingensis antiquiores*, Tom. I, p. 5, è preceduta dalla seguente avvertenza: *Lowviti utebatur scriptis mathematicorum latinis, ipse latine scribendi facultate non pollebat. Igitur commentarius suus vernacula scriptus, curavit ut in latinum sermonem verteretur. Incidit vero in interpretem, qui in mathesi ultra elementa non saperet, latini sermonis ignoraret non solum, quod condonari potuisset, elegantiam, sed ipsas grammaticae leges.*

(2) *Dictionnaire universel de mathématique et de physique*. Tomo I, 448 e 449.

(3) Vedi § 14.

(4) Vedi § 13.

tracciarsi a mano lasciano ancora qualche desiderio insoddisfatto sopra l'esattezza dei fusi, che lunga n'è la descrizione, che per tali motivi il GAMACHES ha cercata una costruzione fondata sopra una teoria più sicura e di più facile applicazione e che, per le sollecitazioni del signor BARADELLE, ingegnere del Re per gli strumenti di matematica, ha fatti gli opportuni calcoli i cui risultati 'consegnò in apposite tabelle. « Tali tavole (dice il SAVERIEN che n'ebbe comunicazione) sopra quali « fondamenti sono costruite? È ciò di cui non posso rendere esattamente « ragione. Solamente so che l'asse del fuso è diviso in 90 parti uguali « e che per ciascuna di queste parti il signor GAMACHES ha calcolata la « diminuzione dell'ordinata all'asse sino al polo in cui termina il fuso. « Questa tavola non è generale. Quella che ho fra mani è per una sfera « di 2 pollici e 3 linee di raggio ». L'autore aggiunge che l'asse del fuso essendo determinato, se ne fa la divisione in 90 parti uguali, che dai punti di divisione s'inizzano le ordinate i cui valori sono nelle nominate tabelle e che, unitine gli estremi con opportuna curva, ne risulta il fuso adattantesi mirabilmente sul globo. Altro non si sa intorno al metodo del GAMACHES ed alle sue tavole, di cui nessuno ha mai più discorso.

§ 19. — Il PERROT, che, come s'è detto al § 14, ricorre al metodo sinussoidale per la descrizione dei fusi, altro ne propone più empirico che razionale (1). Segnate (fig. 1) le due rette PP' e EE', incontrantesi normalmente nel loro punto di mezzo, uguali, in lunghezza, la prima al semimeridiano, la seconda all'arco equatoriale compreso nel fuso, descritte, in modo arbitrario, le due curve PEP' e PE'P' per tener luogo provvisorio dei meridiani, divide queste due curve e il meridiano centrale nello stesso numero di parti uguali, conduce per gli omonimi punti di divisione altrettanti archi di circoli, i quali debbono fare le veci dei paralleli; e, portate sopra questi, a destra ed a sinistra di PP', le lunghezze dei semiarchi dei paralleli compresi nel fuso, ne congiunge gli estremi con opportune linee, che valgono a raffigurare i meridiani esteriori, mentre i paralleli sono rappresentati dai detti archi circolari.

Questo metodo del PERROT, oltre all'essere arbitrario perchè arbitraria n'è la base, ha l'incongruenza di avere il meridiano centrale uguale all'obiettivo del globo ed il meridiano esteriore più lungo del rispondente arco sferico, per cui, in virtù della dilatazione della carta prodotta dal suo inumidimento, all'atto di applicarla sul globo e del successivo stiramento nel senso della maggiore lunghezza, avverrà che e il meridiano

(1) Op. cit. al § 16.

centrale e l'esteriore verranno ad essere più lunghi dei rispondenti meridiani del globo. La quale cosa mostra la fallacia della regola.

§ 20. — Fra le proiezioni cartografiche hanno grande importanza le rappresentazioni cilindriche in cui i meridiani equidistanti sono segnati da rette parallele, pure equidistanti, ed i paralleli da rette perpendicolari alle precedenti, essendo variabile la loro distanza a seconda della specie di proiezione adottata (1). Ora, se in luogo di determinare un punto M della sfera per mezzo della latitudine l e della longitudine t che ne sono le coordinate geografiche e di cui l'una può considerarsi come l'arco di circolo massimo calato da M perpendicolarmente sull'equatore, e l'altra come la distanza arcuale del piede del detto arco da un punto fisso dello stesso equatore, ossia dall'inizio delle longitudini, si ricorre ad altre due coordinate sferiche, all'arco λ di circolo massimo condotto da M normalmente sul meridiano iniziale ed alla distanza arcuale τ del piede di questa perpendicolare dall'equatore, e si rappresentano in piano con rette parallele equidistanti le circonferenze massime fra loro equidistanti, incontranti ad angolo retto il meridiano iniziale, e con rette perpendicolari alle precedenti i circoli della sfera paralleli a questo stesso meridiano, si ottiene la proiezione che appellasi cilindrica inversa. La quale è regolata da ben note formole che abbiamo altrove riportate, intrattenendoci particolarmente sopra tre generi di simile proiezione, la equidistante, la equivalente e la isogonica, detta questa anche conforme (2). È possibile farne l'applicazione alla descrizione piana del fuso, il cui meridiano centrale tenga luogo dell'iniziale? Non può forse ciò arguirsi dalla proiezione del fuso sul cilindro circoscritto alla sfera secondo il suo meridiano centrale e dal susseguente sviluppo del cilindro? Fra poco la risposta. Intanto ricordiamo che le coordinate λ e τ , date le l e t , si hanno dalle equazioni

$$\text{sen } \lambda = \cos l \text{ sen } t, \quad \tan \tau = \frac{\tan l}{\cos t}$$

e che apposita tavola numerica ne facilita la ricerca (3).

Delle tre nominate proiezioni, considerate alla maniera solita, non può avvantaggiarsi la delineazione piana del fuso, sendo che il meridiano centrale risulta uguale al rispondente meridiano del globo e superiore gli

(1) Delle proiezioni cilindriche ho trattato in: *Le proiezioni delle Carte geografiche*. Bologna 1881, Cap. IV.

(2) Cfr. *Le proiezioni delle Carte geografiche*. Cap. V, art. III.

(3) La detta Tavola è in fine del Cap. I dell'opera citata nella nota precedente.

riesce l'esterior meridiano. Ma havvi di più. Della carta inumidita sulla quale è disegnato il fuso si alterano, all'atto della sua applicazione sul globo, le dimensioni che sono soggette, in generale, ad allungarsi, qualcuna potendo anche rimanere immutata, ma nessuna restringersi senza che avvengano grinze e piegature. E se l'applicazione della carta si eseguisce in modo da conservare inalterata la lunghezza della curva esteriore, si allungherà per certo il meridiano centrale, ed allora ambe le linee risulteranno più lunghe dei rispondenti meridiani del globo. Uopo è, dunque, modificare le formole delle tre menzionate proiezioni coll'introdurre opportuni coefficienti. I quali cambieranno la proiezione equidistante in altra che indicheremo con (a); e così la equivalente nella (b), la isogonica, oppure conforme, nella (c). Assumendo, secondo il consueto, come assi delle X e Y i diametri maggiore e minore del fuso e prendendo per unità il grado della circonferenza massima del globo:

la (a) sarà governata da

$$X = \alpha \tau, \quad Y = \beta \lambda,$$

la (b) da

$$X = \alpha' \tau, \quad Y = \beta' \frac{180}{\pi} \operatorname{sen} \lambda,$$

la (c) da

$$X = \alpha'' \tau, \quad Y = \beta'' \frac{180}{\pi} \log \tan \left(45^\circ + \frac{\lambda}{2} \right),$$

dovendo i coefficienti α , β , α' , β' , α'' e β'' essere determinati, come si dirà in seguito da apposite esperienze. Per amore di brevità tralasciamo di occuparci delle formole esprimenti le alterazioni lineari, superficiali ed angolari in riguardo alle proiezioni (a), (b) e (c); è facile dedurle da quelle trovate nei casi in cui quei coefficienti uguagliano l'unità (1).

Facendo variare per gradi uguali le coordinate sferiche λ e τ , si mantengono in ciascuna delle tre nominate proiezioni, equidistanti le rette che rappresentano le circonferenze massime normali al meridiano iniziale; come pure equidistanti risultano nella (a) le rette che raffigurano i circoli paralleli al detto meridiano, e però la (a) può ancora annoverarsi fra le proiezioni equidistanti. La (b), poi, ha le aree amplificate nel costante rapporto $\alpha'\beta'$, e però non è più equivalente, ma semplicemente quantitativa. E la (c) non conserva più gli angoli obiettivi; cessa di essere isogonica e dà luogo a leggere alterazioni angolari.

I suddetti coefficienti si determineranno, come s'è detto al § 14 e 15, provando e riprovando. Certo è che α , α' e α'' si dovranno as-

(1) Op. cit. nella precedente nota.

sumere inferiori, benchè di poco, all'unità. Sarà forse utile fare $\beta = 1$ e prendere β' e β'' differenti, per pochissimo, dall'unità, dovendone essere β' maggiore e β'' minore.

Scelta una delle tre proiezioni e determinatine i coefficienti colle superiori formole, si possono trovare quanti si vogliono punti degli esteriori ed interiori meridiani e dei paralleli del fuso, per cui facile ne riesce la delineazione. Del rimanente, quanto ai paralleli, può anche adottarsi il metodo pratico di tracciarli con archi circolari condotti per gli omonimi punti di partizione dei meridiani esteriori e centrale, divisi nello stesso numero di parti uguali.

Qui appresso diamo le tabelle che, per ciascuna delle proiezioni (a), (b) e (c), rendono ovvia la descrizione del fuso di 20° e che, di 10° in 10° di latitudine ed essendo preso per unità il grado della circonferenza massima del globo, danno, per $t = 10^\circ$, i valori dei quozienti delle coordinate X e Y divise per i rispondenti coefficienti.

Tabella per la descrizione del fuso di 20° , secondo la proiezione (a):

l	$\frac{X}{\alpha}$	$\frac{Y}{\beta}$	l	$\frac{X}{\alpha}$	$\frac{Y}{\beta}$
0°	0,0000	10,0000	50	50,4314	6,4086
10	10,1511	9,8467	60	60,3683	4,9808
20	20,2836	9,3914	70	70,2803	3,4050
30	30,3814	8,6492	80	80,1489	1,7280
40	40,4325	7,6442	90	90,0000	0,0000

Tabella per la descrizione del fuso di 20° , secondo la proiezione (b):

l	$\frac{X}{\alpha'}$	$\frac{Y}{\beta'}$	l	$\frac{X}{\alpha'}$	$\frac{Y}{\beta'}$
0°	0,0000	9,9493	50	50,4314	6,3953
10	10,1511	9,7981	60	60,3683	4,9746
20	20,2836	9,3493	70	70,2803	3,4029
30	30,3814	8,6163	80	80,1489	1,7277
40	40,4325	7,6216	90	90,0000	0,0000

Tabella per la descrizione del fuso di 20°, secondo la proiezione (c):

l	$\frac{X}{\alpha''}$	$\frac{Y}{\beta''}$	l	$\frac{X}{\alpha''}$	$\frac{Y}{\beta''}$
0°	0,0000	10,0513	50	50,4314	6,4220
10	10,1511	9,8995	60	60,3683	4,9871
20	20,2836	9,4337	70	70,2803	3,4070
30	30,3814	8,6822	80	80,1489	1,7283
40	40,4325	7,6670	90	90,0000	0,0000

A quale delle tre proiezioni (a), (b) e (c) si deve dare il primato per la descrizione dei fusi di rivestimento della sfera materiale?

Rendendo i coefficienti uguali all'unità, la proiezione (a) si ritraduce nella equidistante, la (b) nella equivalente, la (c) nella isogonica. Potendosi, poi, ritenere che il meridiano esteriore, per la tenuità della sua longitudine dal meridiano centrale, abbia le ordinate Y (esprese non più in gradi equatoriali, ma in parti di raggio) date:

per la equidistante, da

$$Y = \cos l \sin t + \frac{1}{6} \cos^3 l \sin^3 t;$$

per la equivalente, da

$$Y = \cos l \sin t;$$

per la isogonica, da

$$Y = \cos l \sin t + \frac{1}{3} \cos^3 l \sin^3 t,$$

ed osservando che il primo valore di Y è la media aritmetica del secondo e del terzo, la quale cosa si arguisce altresì dalle precedenti tabelle, chiaro risulta che fra la seconda e la terza proiezione si asside la prima occupandone il giusto posto di mezzo. Il che è anche, in certo qual modo, confermato dalle varie alterazioni che si manifestano nelle stesse tre proiezioni. Imperocchè la isogonica, in cui sono nulle le alterazioni angolari, scapita di fronte alla equidistante per le maggiori alterazioni superficiali, e la equivalente, avendo nulle le superficiali, presenta le angolari maggiori che nella equidistante ora nominata. E chi badi alle alterazioni lineari trova pure che la proiezione equidistante è da preferirsi sì alla equivalente che alla isogonica.

Quando i coefficienti non sieno più uguali all'unità, ben lieve sarà il divario tra le nuove e le prime proiezioni, ogni qual volta gli stessi sieno stati determinati con opportune esperienze eseguite col fine di rendere le proiezioni adatte ai fusi di rivestimento. Allora avverranno cambiamenti nei valori di X e Y; ma saranno talmente esigui da potersi ritenere che la proiezione (a) occupa ancora il posto di mezzo fra le (b) e (c) e che ha tutti i caratteri di superiorità.

§ 21. — Qua e là si sono dati ammaestramenti pratici per la descrizione delle fettucce di carta atte al rivestimento dei globi. Ma tanta n'è l'importanza, che non sarà inutile riassumerli, in qualche parte allargarli, ed anche dire di alcuni in modo speciale.

Più volte s'è detto delle alterazioni a cui soggiacciono le fettucce di carta, come ora si dilatino ed ora si costipino in grazia delle operazioni a cui sono sottoposte, e come l'esatto loro adattamento sulla sfera materiale dipenda dal prenderle un po' più piccole e dal distenderle di poi fino a raggiungere quanto loro compete. E siccome il maggiore o minore distendimento dipende dalla qualità della carta, così è utile il seguente processo: si calcola e si dispone una fettuccia secondo le regole prescritte per il dato diametro della sfera; se ne trasporta il contorno sulla lastra di rame e quindi s'imprime sulla carta della data qualità; la fettuccia, poi, così ottenuta, viene portata sopra la sfera data ed appositamente divisa. In generale, non vi si adatterà esattamente; e però bisognerà rettificarne il contorno, finchè le fettucce per tale modo ottenute ricoprano esattamente la sfera senza che la carta presenti ripiegamenti o lacerature, dovendo gli orli essere aderenti.

La carta deve sempre essere della stessa qualità, sia per le prove, sia per il lavoro ulteriore. Bisogna manipolarla possibilmente in modo uniforme quando si bagna prima di stamparla, sendo che, nell'asciugarsi dopo l'impressione, essa si contrae notevolmente e diviene più piccola della incisione sopra la lastra di rame. La carta non dev'essere troppo grossa, ma bene incollata e così resistente da sopportare le dilatazioni senza lacerarsi. Meglio è rivolgersi, osserva l'ALTMÜTTER (1) alla carta velina, la quale, dopo la stampa, si contrae regolarmente e si lascia, a cagione della sua pieghevolezza uniforme, applicare più facilmente sulla sfera senza che il disegno venga deformato. La carta, poi, spalmata di colla, prima di attaccarla, dev'essere lasciata in riposo fino a che siasi inumidita ed atta a dilatarsi.

Diciamo ora di un altro metodo per la descrizione piana dei fusi sferici.

Indicando sempre con a il raggio della sfera e con $2T$ l'ampiezza del fuso, si assumano, come diametri dell'amandorla che in piano lo rappresenta e quali assi rettangolari delle X e Y , il semineridiano centrale e l'arco equatoriale compreso fra i due meridiani esteriori, ambi sviluppati

(1) *Anleitung zur Verfertigung der Erd- und Himmelsgloben. Von G. Altmütter (Fahrbücher des kaisert. Königl. polytechnischen Institutes in Wien. Vienna, 1829).*

in linea retta e risultanti rispettivamente uguali a $2\pi a$ e $2aT$. Se dal punto di latitudine l del meridiano centrale si eleva perpendicolarmente l'arco y di circolo massimo sino ad incontrare il meridiano esteriore e si ritengono gli archi rettificati al e ay quali valori delle coordinate X e Y del rispondente punto della curva esteriore dell'amandorla, è

$$X = al, \quad Y = ay,$$

essendo y dato da

$$\tan y = \tan T \cos l.$$

La quale ultima formola si ha facilmente dalla considerazione del triangolo sferico formato dall'equatore, dal meridiano esteriore e dalla circonferenza massima a cui spetta l'arco y .

Dicendo, poi, θ e u gli archi del meridiano esteriore che vanno, rispettivamente, dall'equatore all'arco y e da questo al parallelo l , risulta

$$u = l - \theta,$$

dovendosi ricavare θ dalla formola

$$\tan \theta = \cos T \tan l,$$

somministrata pur' essa dal nominato triangolo sferico.

La curva esteriore che ha per equazione

$$\tan \frac{Y}{a} = \tan T \cos \frac{X}{a},$$

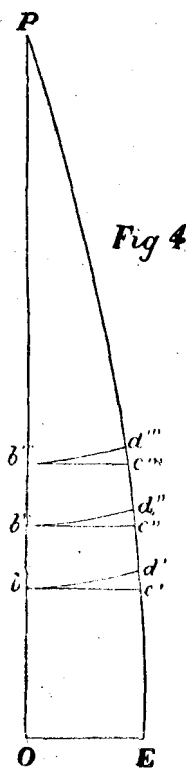
col decrescere dell'ampiezza del fuso va approssimandosi alla sinusoide, la quale, quando T è molto piccolo, è data da

$$Y = aT \cos \frac{X}{a}.$$

Facendo variare l , per mezzo delle tre prime equazioni si ottengono altrettanti valori di X e Y ; e però, segnati (fig. 4) i rispondenti punti $b', b'', b''' \dots$ del meridiano centrale ed i punti $c', c'', c''' \dots$ del meridiano esteriore, riesce fattibile la delineazione dell'amandorla. E se, a partire da uno di questi punti indicato con c , si misura sopra la curva esteriore e verso il polo, l'arco U dato da

$$U = au,$$

dovendosi per la ricerca di u ricorrere alla quarta ed alla quinta delle superiori equazioni, si ottiene il punto d , che rappresenta l'incontro del meridiano esteriore col parallelo l . I punti $d', d'', d''' \dots$ sono gl'incontri de' varî paralleli coll'esterior meridiano.



(Fig. 4).

Per tale modo, dell'arco di ogni singolo parallelo del fuso si hanno tre punti, con cui se ne otterrà la delineazione unendoli con un arco di circolo.

Se l'ampiezza del fuso è di 30° e si vogliono tracciare i meridiani di 10° in 10° , sarà d'uopo segnare, oltre i meridiani esteriori, altresì i meridiani interiori distanti dal meridiano centrale di 5° e trovarne i punti d'incontro coi varî paralleli. Il metodo sarà sempre il medesimo. Se non che, per i meridiani esteriori è $T = 15^\circ$ e per gl'interiori $T = 5^\circ$. Ed è da osservare che per ciascun parallelo si hanno cinque punti i quali ne facilitano il tracciamento.

Ecco la tavola che, offerendo i valori di X, Y e U espressi in gradi equatoriali, serve alla descrizione dei meridiani e paralleli di 10° in 10° per il fuso dell'ampiezza di 30° :

Lati- tudine <i>l</i>	X	Y	U	Y	U
		Per i meridiani esteriori del fuso		Per i meridiani interiori del fuso	
0°	$0^\circ 00' 00''$	$15^\circ 00' 00''$	$0^\circ 00' 00''$	$5^\circ 00' 00''$	$0^\circ 00' 00''$
10	$10 00 00$	$14 46 56$	$0 20 03$	$4 55 24$	$0 02 14$
20	$20 00 00$	$14 07 58$	$0 37 48$	$4 41 59$	$0 04 12$
30	$30 00 00$	$13 03 51$	$0 51 09$	$4 19 58$	$0 05 41$
40	$40 00 00$	$11 35 58$	$0 58 30$	$3 50 03$	$0 06 27$
50	$50 00 00$	$9 46 27$	$0 58 51$	$3 13 07$	$0 06 28$
60	$60 00 00$	$7 37 51$	$0 52 03$	$2 30 17$	$0 05 41$
70	$70 00 00$	$5 14 11$	$0 38 49$	$1 42 50$	$0 04 13$
80	$80 00 00$	$2 39 50$	$0 20 43$	$0 52 13$	$0 02 15$
90	$90 00 00$	$6 00 00$	$0 00 00$	$0 00 00$	$0 00 00$

Ed ecco la precedente tavola ridotta ad esprimere i valori di X, Y e U in parti di raggio:

Lati- tudine <i>l</i>	X	Y	U	Y	U
		Per i meridiani esteriori del fuso		Per i meridiani interiori del fuso	
0°	0,00000	0,26180	0,00000	0,08727	0,00000
10	0,17453	6,25800	0,00583	0,08593	0,00065
20	0,34907	6,24666	0,01100	0,08203	0,00122
30	0,52360	6,22801	0,01488	0,07562	0,00165
40	0,69813	0,20245	0,01702	0,06692	0,00188
50	0,87266	0,17056	0,01712	0,05618	0,00188
60	1,04720	0,13318	0,01514	0,04372	0,00165
70	1,22173	0,09139	0,01129	0,02991	0,00123
80	1,39626	0,04649	0,00603	0,01519	0,00065
90	1,57080	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

L'esposto metodo che è quello del MÖLLINGER (1), messo qui, sotto diversa veste, può bensì servire alla delineazione di un mappamondo a fusi, ma torna disadatto al tracciamento delle amandorle valevoli al ricoprimento della sfera materiale per ragioni altrove accennate. Ed è ben certo che le curve esteriori, più lunghe del diametro PP' , ossia del meridiano sferico, nell'applicazione dell'amandorla sulla sfera non possono costiparsi per divenirgli uguale, e che lo stesso diametro PP' , a cagione della umidità di cui è imbevuta la fettuccia cartacea, corre il pericolo di sottostare ad un allungamento. Chi voglia, tuttavia, utilizzarne le regole per la descrizione delle amandorle atte al rivestimento dei globi, alle superiori espressioni di X , Y e U deve surrogare le

$$X = \alpha al, \quad Y = \beta ay, \quad U = \gamma au,$$

dovendosi i coefficienti α , β e γ determinare in modo analogo a quanto s'è detto ai §§ 14 e 20. Del rimanente, le precedenti tavole riusciranno pur sempre utili, perchè valgono a somministrare i quozienti delle X , Y e Z divise per α , β e γ .

Nel caso di grandi sfere, meglio riuscirà il loro rivestimento se, in luogo dei fusi, si farà uso delle loro metà determinate dalla linea equatoriale, le quali vengono ad essere altrettanti settori della sfera in numero doppio dei fusi. Così operarono i più rinomati compositori di globi; ad esempio, il BLAEUW, il GREUTER, il CORONELLI, il VALK.

Altro avvertimento da non trascurarsi è che bisogna lasciare lungo l'orlo della fettuccia presa a tagliare quella porzione che dev'essere posta a ridosso per servire di congiunzione alla fettuccia attigua.

Nell'applicare sulla sfera materiale le fettucce cartacee accade che s'incontrino non lievi difficoltà ad ottenere il perfetto adattamento delle parti polari, sia per la loro sottigliezza ed acuità, sia perchè gli angoli formati dalle curve esteriori delle fettucce non uguagliano gli angoli obiettivi. Ben presto se ne accorsero i compositori dei globi terrestri e celesti. E primo a portarvi rimedio, per quanto io sappia, fu GERARDO MERCATORE, che troncò le fettucce in prossimità dei poli asportandone le parti superiori al parallelo di 70° e riparando a tale mancanza coll'applicare sul globo, concentricamente a' suoi poli, le rappresentazioni piane delle due deficienti zone polari, foggiate a circolo e delineate colle regole della proiezione polare equidistante. Ma i compositori dei globi

(1) OSKAR MÖLLINGER, *Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojektionen mit besonderer Berücksichtigung der Stereographischen, Bonnéschen und Mercator-projektion*. Zurigo, 1882, dov'è l'art. VII col titolo: *Construktion des Netzes der Erd- und Himmelsgloben*.

che ben tosto si fecero seguaci del geografo fiammingo ebbero a lottare contro altra difficoltà, sendo che i dischi circolari sostituiti alle asportate estremità dei fusi malamente si applicano sui globi, non soltanto per il fatto delle dilatazioni prodotte dall'umidore della spalmatavi colla, ma anche più perchè il disco circolare supera, in area, la rispondente zona sferica. A tale disavvantaggio si pensò di ovviare col togliere dal disco circolare un ben piccolo settore in guisa che, facendone poi l'applicazione sul globo, riuscissero a combaciarsi i raggi estremi della parte piena del disco (1).

Ora si domanda: al settore di cui dev'essere diminuito il disco circolare quale ampiezza è da attribuire?

Chi consideri che, nell'adattare il disco sul globo, il suo raggio non soggiace a stiramenti, trova opportuno renderlo pari, in lunghezza, alla diffalcata porzione del meridiano, qualunque sia il metodo della delinea-zione piana del fuso. Per cui, essendo a il raggio della sfera e dicendo φ la colatitudine del parallelo di troncamento dei fusi, il raggio del disco uguaglia $a \varphi$. Ma siccome il circolo descritto con tale raggio ha l'area maggiore della superficie della zona sferica che deve coprire, così fa d'uopo togliere dal disco un piccolo settore di tale ampiezza δ che la sua restante area pareggi la superficie della zona. Cotesta condizione traducesi nell'equazione

$$\frac{1}{2} a^2 \varphi^2 (2 \pi - \delta) = 4 \pi a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

da cui si trae

$$\delta = 2 \pi \left(1 - \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\varphi^2} \right).$$

L'adattamento, su la sfera, del disco mancante del nominato settore avverrà colla massima facilità quando la colatitudine φ del parallelo di troncamento sia di pochi gradi. Allora fra il rimanente arco della periferia del disco e la circonferenza del detto parallelo correrà una ben lieve differenza, espressa da

$$D = a \varphi (2 \pi - \delta) - 2 \pi a \sin \varphi,$$

che, in virtù della precedente equazione e di ulteriori riduzioni, cambiassi in

$$D = 2 \pi a \sin \varphi \left(\frac{2 \tan \frac{\varphi}{2}}{\varphi} - 1 \right).$$

(1) L'accennato artificio fu adoperato da MATTEO SEUTTER, come scorgesi dai fusi che stampò in Augusta per il rivestimento dei globi celeste e terrestre del diametro di 202 millimetri.

Nel caso di $\varphi = 10^\circ$ si trova

$$\delta = 0^\circ.54'.46'', \frac{D}{2\pi a \sin 10^\circ} = 0,00024;$$

per $\varphi = 15^\circ$

$$\delta = 2^\circ.03'.06'', \frac{D}{2\pi a \sin 15^\circ} = 0,00575;$$

per $\varphi = 20^\circ$

$$\delta = 3^\circ.38'.26'', \frac{D}{2\pi a \sin 20^\circ} = 0,01028.$$

E però di leggiera ampiezza sono i settori da diffalcare dai dischi circolari e di molta tenuità le differenze D espresse in parti della circonferenza del parallelo secondo il quale sono troncati i fusi.

In pratica può essere utile diffalcare dal disco circolare, in luogo del progettato settore, due settori diametralmente opposti e di ampiezza $\frac{\delta}{2}$.

§ 22. — Il nostro compito è terminato, poichè nel trattare dei globi abbiamo avuto l'intendimento di dire in parte della storia delle sfere terrestri e principalmente della delineazione dei fusi atti al loro rivestimento. Alla costruzione della sfera materiale, come ad argomento esclusivamente tecnico, non abbiamo volta la mente. Se ne sono tramandati i metodi da costruttore a costruttore, da officina ad officina. Nè mancarono gli autori che vi hanno scritto sopra con molta sagacia ed avvedutezza a cominciare dal secolo XVI e venendo fino a' nostri giorni. Nel cinquecento emerse il RUSCELLI (1), in minore scala il MOLETTI (2), nel secolo seguente ne discorse il BION (3), nel settecento scrisse sullo stesso argomento l'astronomo SCHRÖTER (4), i cui procedimenti furono rifiutati dal KRÜNITZ nella Enciclopedia economico-tecnologica (5), e tacendo di

(1) GIROLAMO RUSCELLI (*Espositioni et introductioni universali sopra tutta la Geografia di Tolomeo*. Venezia, 1561, Cap. II) tratta: *Del modo di fabricar la palla materiale per potervi segnar sopra i circoli et l'altre cose che vi convengono*. Vedi anche il Cap. IV.

(2) *Discorso di M. Giuseppe Moletto, filosofo e matematico eccellentissimo. Nel quale con via facile e breve si dichiarano e insegnano tutti i termini e tutte le regole appartenenti alla Geografia*. Venezia, 1573. — Vedi il Cap. II, intitolato: *Come si possa descrivere la terra in una palla*.

(3) N. BION (*L'usage des globes céleste et terrestre*, 6^{me} Edit. Paris, 1702, p. 266) tratta della fabbrica dei globi sotto il titolo: *Pour faire des Boules de carton propres à y coller des fuseaux*.

(4) J. E. BODES *astronomisches Jahrbuch auf 1786*. Berlino, 1783, p. 135-160,

(5) *Ökonomisch-technologische Encyclopädie*. Berlino, 1791, vol. LIV p. 562 e seguenti.

altri valenti uomini che trattarono della fabbricazione dei globi, deve dirsi che, fra gli scrittori del nostro secolo, primeggia l'ALTMÜTTER, che scrisse intorno alla costruzione della sfera materiale (1).

Ad altri la fortuna di fare opera migliore della nostra intorno ai globi terrestri e celesti. A noi sarà mancato l'ingegno, non la buona volontà. Grande compenso avranno le sostenute fatiche se, invogliato da questi scritti, sorgerà chi faccia progredire la letteratura delle sfere cosmografiche.
